

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

**DIPLÔME DE DOCTEUR EN MÉTHODES D'APPROXIMATION
ET ALGORITHMES EN ANALYSE ET THÉORIE DES NOMBRES**

par

Driss ESSELAOUI

**RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DU PROBLÈME DE LA
FLEXION DES PLAQUES MINCES PAR UNE
MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS NON CONFORMES
SUR UN MAILLAGE QUADRILATÉRAL QUELCONQUE**



Soutenue le 5 Octobre 1979, devant la commission d'examen :

MM. J. ROBERT, Professeur

Président

P. LESAIN, Professeur

J.-C. MIELLOU, Professeur

} Examineurs

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546609_0001

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

**DIPLÔME DE DOCTEUR EN MÉTHODES D'APPROXIMATION
ET ALGORITHMES EN ANALYSE ET THÉORIE DES NOMBRES**

par

Driss ESSELAOUI

**RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DU PROBLÈME DE LA
FLEXION DES PLAQUES MINCES PAR UNE
MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS NON CONFORMES
SUR UN MAILLAGE QUADRILATÉRAL QUELCONQUE**



Soutenue le 5 Octobre 1979, devant la commission d'examen :

MM. J. ROBERT, Professeur

Président

P. LESAIN, Professeur
J.-C. MIELLOU, Professeur

} Examineurs



UNIVERSITE DE FRANCHE-COMTE – BESANÇON

Président : Monsieur LÉVÊQUE Pierre

FACULTE DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

DOYEN

M. GALATRY Louis : Physique Moléculaire
Professeur

ASSESSEURS

MM. MILLET Bernard : Botanique
Maître de Conférences
GUYETANT Robert : Biol. Animale Ecol.
Maître-Assistant

PROFESSEURS

MM. PERROT Roger : Chimie Générale
PLUVINAGE Philippe : Physique Théorique
CHALEAT Raymond : Mécanique Appliquée
BERNARD Jean : Chimie Physique
RIPPLINGER Jean : Physiologie Anim.
GREMILLARD Jean : Mathématiques
VIENOT J. Charles : Physique Gle Optique
THIEBAUT Jean : Pétrographie Minér.
GOMOT Lucien : Zoologie Embryol.
THEOBALD J. Gérard : Spectroscopie Hertz.
CERUTTI Ernest : Chimie Appliquée
DEVIN Claude : Chimie 1er cycle
CAPODANNO Pierre : Mécanique Théorique
BANTEGNIE Robert : Mathématiques
ROBERT Daniel : Physique Moléculaire
ROBERT Jacques : Mathématiques I
CHAUVE Pierre : Géologie-Minéral.
RANGHEARD Yves : Géologie
BIDAULT Michel : Taxonomie Expérim.
GRAS Georges : Mathématiques
LHOTE François : Chronométrie
GAUDEMER Yves : Biochimie

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM. POTIER Robert : Physique des Sol.
REAL Pierre : Ecologie Animale
GOUARNE René : Mathématiques
MERIGOUX Henri : Cristallographie et
synthèses minérales
OLIVIER Marcel : Electronique Quant.
MONTAGNER Hubert : Psychophysiologie
BULABOIS Jean : Physique Gle Optique
LAUDE Bernard : Chimie Organique
MIELLOU J. Claude : Analyse Numérique
ROBERT Guy : Electrochimie
DUBOUCHET Jacques : Physiologie Végétale
WEIL Michel : Mathématiques

DOYENS HONORAIRES

MM. GLANGEAUD, JACQUEMAIN,
CHATELET, THIEBAUT, BERNARD.

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. THIRY, TRILLAT, UEBERSFELD,
TRONCHET, THEOBALD N., QUANTIN,
BENNETON, CHATELET.

MAITRES DE CONFERENCES

MM. BROQUET Paul : Géologie
TREHEL Michel : Informatique
MILLET Bernard : Botanique
BENILAN Philippe : Mathématiques
COUGNARD Jean : Mathématiques
LALLEMENT Gérard : Mécanique Appl.
LESAINTE Pierre : Mathématiques I
MOREELS Guy : Astronomie
BRUCKERT Sylvain : Ecologie Végétale
CHARDON J. Claude : Spectroscopie
KARCHE J. Paul : Pétrographie Min.

RESPONSABLE DES SERVICES

ADMINISTRATIFS

M. RUNGE J. Marie

A

Monsieur le Professeur P. LESAINT

Avec mes respects.

A ma Mère,

A mon Père,

A tous ceux qui m'ont fait,

et A toute ma famille.

A tous mes Amis de Bou-Adel,

de Besançon et de Paris.

Je tiens à remercier Monsieur J. ROBERT, Professeur à l'Université de Besançon, Directeur de l'E. R. A. de Mathématiques, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le Jury.

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur P. LESANT, Professeur à l'Université de Besançon, qui est à l'origine de ce travail. Il a toujours eu la patience de m'écouter et de me guider au cours de la préparation de cette thèse. Ses conseils judicieux, ses encouragements incessants et son aide bienveillante m'ont permis de mener à bien cette étude.

Je veux exprimer ma gratitude à Monsieur J. C. MIELLOU, Professeur à l'Université de Besançon, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de participer à ce Jury.

Il m'est agréable de remercier tous mes camarades du Laboratoire d'Analyse Numérique et Informatique. Je ne saurais oublier le personnel du Centre de Calcul ; je lui adresse ici mes remerciements les meilleurs.

Que Mademoiselle C. PAGANI et Madame C. VUILLEMENOT trouvent ici l'expression de mes profonds remerciements pour le grand soin et la diligence apportés à la réalisation (difficile) matérielle de ce document.

INTRODUCTION

=====

Ce travail a pour but l'étude et l'approximation de la solution du problème de flexion des plaques minces, tel qu'il est décrit dans le livre de Landau L. - Lifchitz E. [17].

- Position du problème :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ assez régulière (la plaque est représentée par l'ensemble $\overline{\Omega}$ du plan supposé horizontal, en l'absence de champs de force) :

Le problème peut être formulé de la manière suivante :

$$(P) \quad \begin{cases} \text{trouver } u \in H_0^2(\Omega) \text{ telle que} \\ a(u, v) = (f, v) \text{ pour tout } v \in H_0^2(\Omega), \end{cases}$$

où $a(u, v)$ est la forme bilinéaire symétrique continue sur $H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ définie par :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left\{ \Delta u \Delta v + (1-\sigma) \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right\} dx dy,$$

où $(f, v) = \int_{\Omega} f v dx dy$, une forme linéaire continue sur $H^2(\Omega)$.

L'énergie de la plaque, pour une côte donnée v , est donnée par l'expression (voir Landau L. - Lifchitz E. [17]. ch. 2, page 60)

$$E(v) = \frac{E e^3}{24(1-\sigma^2)} \int_{\Omega} \left\{ (\Delta v)^2 + 2(1-\sigma) \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy \\ - \int_{\Omega} F v dx dy$$

où e , E , σ désignent respectivement l'épaisseur, le module de Young et le coefficient de Poisson de la plaque (physiquement σ vérifie les inégalités $0 < \sigma < \frac{1}{2}$).

Si on pose $f = \frac{12(1-\sigma^2)F}{Ee^3}$, l'énergie de la plaque s'écrit (à un facteur multiplicatif près), (cf. P. G. Ciarlet [7])

$$J(v) = \frac{1}{2} a(u, v) - (f, v).$$

Le problème (P) sera équivalent au problème de minimisation suivant

$$(Q) \quad \begin{cases} \text{trouver } u \in H_0^2(\Omega) = V \text{ telle que} \\ J(u) = \min_{v \in V} J(v). \end{cases}$$

- Interprétation :

Si la solution u du problème (P) est suffisamment régulière (voir Konrat'ev [16]), elle est aussi la solution du problème

$$(R) \quad \begin{cases} \Delta^2 u = f \text{ dans } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

C'est le modèle "classique" le plus simple pour une plaque encastree, l'encastrement étant pris en compte par les conditions aux limites,

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma, \text{ i. e.}$$

• $u|_{\Gamma} = 0$, montre que "la plaque ne peut pas bouger",
i. e. fixe sur le bord

• $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$, la plaque est rigidement encastree.

- Approximation : Méthodes d'éléments finis non conformes.

Pour approximer la solution u du problème (P), on utilise l'élément fini d'Adini [1] déformé. Etant donné l'espace de dimension finie V_h construit à partir de tel élément fini, le problème discret consiste à :

$$(P_h) \quad \begin{cases} \text{trouver une fonction } u_h \in V_h \text{ telle que} \\ a_h(u_h, v_h) = (f, v_h) \text{ pour tout } v_h \in V_h. \end{cases}$$

La forme bilinéaire $a_h(.,.)$ et la forme linéaire $f(.)$ sont données respectivement par

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in \tau_h} \int_K \left\{ \Delta u_h \Delta v_h + (1-\sigma) \left(2 \frac{\partial^2 u_h}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v_h}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_h}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2} \right) \right\} dx dy$$
$$(f, v_h) = \sum_{K \in \tau_h} \int f v_h dx dy.$$

La remarque (1-4) du chapitre 1 nous montre l'intérêt de la méthode d'élément fini non conforme pour notre problème.

- Convergence :

La convergence de la méthode n'est possible que si certaines conditions sur cette déformation de l'élément fini sont satisfaites. Des conditions suffisantes seront données au fur et à mesure de l'exposé.

- Approximation des intégrales :

Il est impossible de calculer exactement les intégrales définissant la forme bilinéaire $a_h(.,.)$ et la forme linéaire $f(.)$. C'est pourquoi, on est amené à utiliser des formules de quadratures numériques pour approcher ces intégrales ; cela nous conduit à poser un nouveau problème discret :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h \in V_h \text{ telle que} \\ \tilde{a}(u_h, v_h) = (f, v_h)_h \text{ pour tout } v_h \in V_h \end{cases}$$

où $\tilde{a}_h(.,.)$ est la forme bilinéaire définie par

$$\begin{aligned} \tilde{a}_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in \tau_h} \sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell, K} [\Delta u_h \Delta v_h + (1-\sigma) \left(2 \frac{\partial^2 u_h}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v_h}{\partial x \partial y} \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_h}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2} \right)] (b_{\ell, K}) \end{aligned}$$

aussi la forme linéaire $f(\cdot)_h$ est définie par

$$(f, v_h)_h = \sum_{K \in \tau_h} \sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell, K} (f v_h) (b_{\ell, K})$$

où $b_{\ell, K}$ $\ell = 1, \dots, L$ sont des points donnés de K et les $\omega_{\ell, K}$ $\ell = 1, \dots, L$ des poids d'intégration correspondants. On montre qu'un choix judicieux de la formule de quadrature permet d'obtenir une estimation asymptotique de l'erreur de même ordre que celle obtenue dans le cas d'intégration exacte.

On présente les résultats dans trois parties.

- Première partie :

Dans le chapitre 0, nous donnerons quelques notations générales et quelques définitions, dans l'analyse de la méthode des éléments finis.

Dans le chapitre 1, nous définissons l'espace d'élément fini non conforme V_h i. e. V_h n'est pas un sous-espace de l'espace V .

Nous donnons l'existence et l'unicité de la solution des problèmes (P) et (P_h) . Nous énonçons un résultat du "Patch Test" de P. Lascaux - P. Lesaint [18], dans le cas de l'élément fini non conforme d'Adini rectangulaire. Nous faisons remarquer, dans le cas d'élément fini non conforme d'Adini déformé, "le Patch Test" n'est pas vérifié.

Dans le chapitre 2, nous donnons une estimation de l'erreur, sous certaines conditions sur la déformation.

- Deuxième partie : Intégration numérique

C'est l'objet du chapitre 3 :

Nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution du problème $(\tilde{P}_h)$.

Nous donnerons le théorème de majoration d'erreur abstrait. Nous estimons tous les termes de consistance qui apparaissent dans ce théorème, soit dans le cas d'élément fini d'Adini rectangulaire (cas affine), soit dans le cas d'élément fini d'Adini déformé (cas non affine).

- Troisième partie (chapitre 4) :

La discrétisation du problème (P) par cette méthode d'élément fini, conduit à la résolution d'un système linéaire. Pour former la matrice de rigidité et le second membre de ce système, on a procédé, en calculant par ligne, pour un noeud $\tilde{i}$ quelconque du maillage,

Le système linéaire $KU = B$ sera résolu par une méthode directe : méthode de Cholesky bande. Eventuellement on va faire des essais numériques dans le but de tester cette méthode d'élément fini.

Ω est le carré unité $]0,1[\times]0,1[$, triangulé en élément d'Adini rectangulaire.

$$f = 24 [x^2 (1-x)^2 + y^2 (1-y)^2] + 2 (2 - 12x + 12x^2)(2 - 12y + 12y^2)$$

est la fonction test correspondante à la solution exacte

$u(x, y) = x^2 (1-x)^2 y^2 (1-y)^2$ du problème (R). (Les calculs seront faits sur ordinateur IRIS 50 du Centre de Calcul de Besançon).

Autres études :

De nombreux auteurs ont étudié le problème de la plaque encastree, en utilisant des méthodes d'éléments finis conformes (cf. Ciarlet [7],...). Plusieurs méthodes d'éléments finis non conformes, pour lesquelles un essai de justification a priori de "Patch Test" de B. Irons [13] a été fait par M. Crouzeix, P.A. Raviart [11], P. Lascaux, P. Lesaint [18] et G. Strang [24]. D'autres ont considéré les méthodes "Hybrides" ou "Mixtes"

(cf. Oden [22], Pian [23]) qui sont associées à d'autres formulations variationnelles. Nous renvoyons le lecteur intéressé par l'analyse numérique de ces méthodes à Brezzi [3], Oden [22] et aux travaux de Johnson [14, 15] ; de même nous renvoyons à Glowinski [12] par des méthodes "par décomposition".

TABLE DES MATIERES

	page
<u>INTRODUCTION</u>	
<u>CHAPITRE 0</u> : Rappels de quelques résultats dans l'analyse de la méthode des éléments finis et compléments	
1 - Notations générales.....	9
2 - Quelques résultats.....	11
3 - Elément fini et élément fini de référence	16
a) Définitions.....	16
b) Elément fini de référence.....	17
c) Isomorphismes subordonnés à un changement de variable	18
d) Eléments finis.....	19
<u>CHAPITRE 1</u> : Formulation variationnelle du problème - Elément fini non conforme - Justification du "Patch Test" de B. Irons	
1 - Position du problème - Problème continu.....	26
2 - Elément fini non conforme - Construction de l'espace V_h discret.....	29
a) Elément fini non conforme (K, P_K, Σ_K)	30
b) Espace d'élément fini V_h , $V_h \not\subset H_0^2(\Omega)$	32
3 - Problème discret : Existence et unicité de la solution,....	33
4 - Estimation de l'erreur de consistance : critère de "Patch Test".....	35
5 - Critère de "Patch Test" dans le cas du quadrilatère convexe	38

CHAPITRE 2 : Estimation du terme de consistance $R_h(\cdot, \cdot) =$

1 - Résultats.....	49
2 - Décomposition de $R_h(u, w_h) = (f, w_h) - a_h(u, w_h)$	57
3 - Estimation de $\Delta_{K,x}^{(1)}(\cdot, \cdot)$	59
4 - Théorème (2-1).....	64

CHAPITRE 3 : L'effet de l'intégration numérique sur la majoration d'erreur dans le cas du maillage en quadrilatères convexes

1 - Introduction.....	66
2 - Position du problème.....	67
3 - Théorème d'existence et d'unicité	70
a) Cas où la transformation F_K est affine.....	75
b) Cas où la transformation F_K est non affine	79
4 - Théorème de majoration d'erreur.....	89
5 - Estimation du terme de consistance	
$\sup_{w_h \in V_h} \frac{ (f, w_h) - (f, w_h)_h }{\ w_h\ _h}$	91
a) Cas où la transformation F_K est affine.....	91
b) Cas où la transformation F_K est non affine	98
6 - Estimation du terme de consistance	
$\sup_{w_h \in V_h} \frac{ a_h(v_h, w_h) - \tilde{a}_h(v_h, w_h) }{\ w_h\ _h}$	106
a) Cas où la transformation F_K est affine.....	107
b) Cas où la transformation F_K est non affine	109

CHAPITRE 4 : Formation de la matrice de rigidité et du second membre du système -Leurs techniques de calcul

1 - Quelques définitions et notations	134
2 - Calcul par ligne de la matrice de rigidité.....	136
3 - Calcul de $3\tilde{\gamma}-2$, $3\tilde{\gamma}-1$, $3\tilde{\gamma}$ lignes du système linéaire....	142
4 - Calcul sur le carré de référence.....	148

- C H A P I T R E 0 -

RAPPELS DE QUELQUES RESULTATS DANS L'ANALYSE DE LA METHODE
=====

DES ELEMENTS FINIS ET COMPLEMENTS
=====

Les résultats et notations que nous allons rappeler seront fort utiles par la suite.

1 - NOTATIONS GENERALES :

Soit Ω un ouvert d'un espace euclidien $x_1, \dots, x_n$ ie $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial \Omega$, C^1 par morceaux, au sens de Necăs [1].

Etant donné un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, nous posons :

$$\cdot \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad , \quad \partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}$$

$$\cdot \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad , \quad \partial_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \quad .$$

Espaces de Sobolev : $W^{m,p}(\Omega)$ et $H^m(\Omega)$:

Pour tout entier $m \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$, nous désignons par $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev des (classes de) fonctions $v \in L^p(\Omega)$ dont toutes les dérivées partielles $\partial^\alpha v$ d'ordre $|\alpha| \leq m$, prises au sens des distributions sur Ω , appartiennent à l'espace $L^p(\Omega)$.

Pour tout $v \in W^{m,p}(\Omega)$

$$(0-1) \quad \left\{ \begin{array}{l} v \rightarrow \|v\|_{m,p,\Omega} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} v|^p dx \right\}^{1/p}, \quad p < \infty \\ v \rightarrow \|v\|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha| \leq m} \left\{ \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |\partial^{\alpha} v(x)| \right\}, \quad p = \infty \end{array} \right.$$

est une norme sur $W^{m,p}(\Omega)$, qui fait de ce dernier un espace de Banach réflexif pour $1 < p < \infty$.

Nous associons la semi-norme suivante :

$$(0-2) \quad v \rightarrow |v|_{m,p,\Omega} = \left\{ \sum_{|\alpha| = m} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} v|^p dx \right\}^{1/p}, \quad p < \infty$$

Pour $p = 2$, nous notons $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, qui sera muni de la norme

$$(0-3) \quad v \rightarrow \|v\|_{m,\Omega} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} (\partial^{\alpha} v)^2 dx \right\}^{1/2}$$

Muni de celle-ci, $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert. Nous utiliserons également les semi-normes suivantes

$$(0-4) \quad v \rightarrow |v|_{m,\Omega} = \left\{ \sum_{|\alpha| = m} \int_{\Omega} (\partial^{\alpha} v)^2 dx \right\}^{1/2}$$

$$(0-5) \quad v \rightarrow [v]_{m,\Omega} = \left\{ \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^m v}{\partial x_i^m} \right)^2 dx \right\}^{1/2}$$

La norme de $L^2(\Omega)$ sera notée $|\cdot|_{L^2(\Omega)}$ ou $|\cdot|_{0,\Omega}$.

Soit $(H^m(\Omega))'$ le dual fort de $H^m(\Omega)$. On note la dualité (f, v) entre un élément de $H^m(\Omega)$ et un élément f de $(H^m(\Omega))'$ et nous définissons la norme

duale par

$$(0-6) \quad \|f\|_{m, \Omega}^* = \sup \left\{ \frac{(f, v)}{\|v\|_{m, \Omega}} , \quad v \in H^m(\Omega) , \quad v \neq 0 \right\}$$

Les notations précédentes sont aussi utilisées par la suite avec Ω , remplacé par $\partial \Omega$.

2 - QUELQUES RESULTATS :

On rappelle quelques résultats dont nous aurons besoin.

Lemme (0-1) :

On suppose Ω borné. Alors, il existe une constante C dépendant de Ω telle que pour tout $u \in H^1(\Omega)$, on ait :

$$(0-7) \quad \|u\|_{L^2(\partial \Omega)} \leq C (\|u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{1, \Omega})^{1/2}$$

(cf. Lions [20] tome I), (Necăs [1], ch. 1).

On rappelle un résultat de Tartar dont la démonstration se trouve aussi dans un article de Brezzi-Marini [3].

Lemme (0-2) :

Soient un espace de Banach E et deux espaces normés E_1 et E_2 .

On considère deux opérateurs linéaires $A_i \in \mathcal{L}(E, E_i)$; $i = 1, 2$, tels que

(i) $v \rightarrow \|A_1 v\|_{E_1} + \|A_2 v\|_{E_2}$ définit sur E une norme équivalente à la norme $v \rightarrow \|v\|_E$.

(ii) L'opérateur A_1 est compact

Soit d'autre part P le noyau de l'opérateur A_2 . Alors l'application $v \rightarrow \|A_2 v\|_{E_2}$ est une norme sur l'espace quotient E/P équivalente à la norme quotient.

A partir de ce lemme, nous aurons deux résultats essentiels.

Lemme (0-3) :

On considère un ouvert Ω borné de frontière continue. Soient k, r deux entiers ≥ 0 . D'autre part, soit $f \in (H^{k+r+1}(\Omega))^1$ telle que :

$$(0-8) \quad (f, u) = 0 \text{ pour tout } u \in P_k \text{ (resp } Q_k \text{)}.$$

Alors il existe une constante $C = C(n, k, r, \Omega)$ telle que :

$$(0-9) \quad |(f, u)| \leq C \|f\|_{k+r+1, \Omega}^* \sum_{\ell=k+1}^{k+r+1} |u|_{\ell, \Omega}$$

$$(0-10) \quad \text{(resp) } |(f, u)| \leq C \|f\|_{k+r+1, \Omega}^* \sum_{\ell=k+1}^{k+r+1} [u]_{\ell, \Omega}, \text{ pour tout } u \in H^{k+r+1}(\Omega).$$

Pour la démonstration, on peut se référer à Lesaint [19].

Le résultat suivant est une généralisation du lemme (0-3) dont la démonstration est donnée dans (cf. Lesaint [19]), pour le cas $k \geq 0, r \geq 1$, mais le résultat est vrai pour tout $k \geq 0, r \geq 0$.

Lemme (0-4) :

On considère Ω ouvert borné, de frontière continue. Soient deux entiers k et r , avec $k \geq 0$ et $r \geq 0$. D'autre part, soit une forme linéaire f continue sur $H^{k+r+1}(\Omega)$ telle que :

$$(0-11) \quad |(f, u)| \leq \|f\|_{k+r+1, \Omega}^* \sum_{\ell=k}^{k+r} (\eta_{\ell} |u|_{\ell, \Omega} + \mu_{\ell} [u]_{\ell, \Omega})$$

pour tout $u \in P_{k+r}$.

Alors il existe une constante $C = C(n, r, k, \Omega)$ telle que

$$(0-12) \quad |(f, u)| \leq C \|f\|_{k+r+1, \Omega}^* \sum_{\ell=k}^{k+r+1} (\alpha_{\ell} |u|_{\ell, \Omega} + \beta_{\ell} [u]_{\ell, \Omega}),$$

pour tout $u \in H^{k+r+1}(\Omega)$,

avec

$$\alpha_\ell = \eta_\ell, \quad \beta_\ell = \mu_\ell, \quad \text{pour } k \leq \ell \leq k+r$$

$$\alpha_{k+r+1} = 1 + \sum_{\ell=k}^{k+r} \eta_\ell, \quad \beta_{k+r+1} = \sum_{\ell=k}^{k+r} \mu_\ell.$$

Démonstration :

On suppose que (0-11) est vrai pour $k \geq 0$, $r \geq 0$ pour tout $u \in P_{k+r}$. La propriété suivante est satisfaite (d'après la démonstration du lemme (0-3)).

La semi-norme $|\cdot|_{k+r+1, \Omega}$ est une norme sur l'espace quotient $H^{k+r+1}(\Omega)/P_{k+r}$, équivalente à la norme quotient :

$$(0-13) \quad \|\bar{u}\|_{k+r+1, \Omega} = \inf \{ \|u+v\|_{k+r+1, \Omega}, v \in P_{k+r} \} \quad \text{où}$$

$\bar{u}$ dénote la classe d'équivalence de l'un quelconque de ces éléments u . Il existe donc une constante $C = C(n, k, r, \Omega)$ et un polynôme $v_o \in P_{k+r}$ tels que :

$$(0-14) \quad \|u+v_o\|_{k+r+1, \Omega} \leq C |u|_{k+r+1, \Omega}$$

Soit maintenant $f \in (H^{k+r+1}(\Omega))'$ satisfaisant à (0-11), on a :

$$(f, u) = (f, u+v_o) - (f, v_o)$$

d'où on déduit :

$$(0-15) \quad |(f, u)| \leq \|f\|_{k+r+1, \Omega}^* \|u+v_o\|_{k+r+1, \Omega} + |(f, v_o)|$$

$$\text{or} \quad |(f, v_o)| \leq \|f\|_{k+r+1, \Omega}^* \sum_{\ell=k}^{k+r} (\eta_\ell |v_o|_{\ell, \Omega} + \mu_\ell [v_o]_{\ell, \Omega})$$

D'après l'inégalité (0-14), on a :

$$(0-16) \quad |v_o|_{\ell, \Omega} \leq |u|_{\ell, \Omega} + C|u|_{k+r+1, \Omega}$$

$$(0-17) \quad [v_o]_{\ell, \Omega} \leq [u]_{\ell, \Omega} + C|u|_{k+r+1, \Omega} \text{ pour tout } \ell \leq k+r.$$

En combinant les relations (0-14) à (0-17), nous aurons :

$$\begin{aligned} |(f, v_o)| &\leq \|f\|_{k+r+1, \Omega}^* \sum_{\ell=k}^{k+r} [\eta_{\ell}(|u|_{\ell, \Omega} + C|u|_{k+r+1, \Omega}) + \mu_{\ell}([u]_{\ell, \Omega} + C|u|_{k+r+1, \Omega})] \\ &\leq C_1 \|f\|_{k+r+1, \Omega}^* \sum_{\ell=k}^{k+r} [(\eta_{\ell}|u|_{\ell, \Omega} + \eta_{\ell}|u|_{k+r+1, \Omega}) + (\mu_{\ell}[u]_{\ell, \Omega} + \mu_{\ell}|u|_{k+r+1, \Omega})] \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} |(f, u)| &\leq C \|f\|_{k+r+1, \Omega}^* \left[\sum_{\ell=k}^{k+r} \eta_{\ell} |u|_{\ell, \Omega} + (1 + \sum_{\ell=k}^{k+r} \eta_{\ell}) |u|_{k+r+1, \Omega} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\ell=k}^{k+r} \mu_{\ell} [u]_{\ell, \Omega} + \sum_{\ell=k}^{k+r} \mu_{\ell} |u|_{k+r+1, \Omega} \right] \end{aligned}$$

d'où

$$|(f, u)| \leq C \|f\|_{k+r+1, \Omega}^* \sum_{\ell=k}^{k+r+1} (\alpha_{\ell} |u|_{\ell, \Omega} + \beta_{\ell} [u]_{\ell, \Omega})$$

C. Q. F. D.

Pour la démonstration des lemmes suivants, on peut se référer à CIARLET [5,6], CIARLET-RAVIART [9].

Lemme (0-5) :

Soient $\hat{\Omega}$ et Ω deux ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$, tels que $\Omega = F(\hat{\Omega})$, où F est une application bijective suffisamment régulière, avec F^{-1} suffisamment régulière de $\Omega \rightarrow \hat{\Omega}$.

Alors, si une fonction $\hat{v} : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à l'espace $W^{\ell, p}(\hat{\Omega})$ pour tout $\ell \geq 0$ et pour tout nombre $p \in [1, \infty]$, la fonction $v = \hat{v} \circ F^{-1} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à l'espace $W^{\ell, p}(\Omega)$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$(0-18) \quad \forall v \in L^p(\Omega), |\hat{v}|_{0, p, \hat{\Omega}} \leq C (\inf J_F(\hat{x}))^{-1/p} |v|_{0, p, \Omega}$$

$$(0-19) \quad \forall v \in W^{1, p}(\Omega), |\hat{v}|_{1, p, \hat{\Omega}} \leq C (\inf J_F(\hat{x}))^{-1/p} |F|_{1, \infty, \hat{\Omega}} |v|_{1, p, \Omega}$$

$$(0-20) \quad \forall v \in W^{2, p}(\Omega), |\hat{v}|_{2, p, \hat{\Omega}} \leq C (\inf J_F(\hat{x}))^{-1/p} (|F|_{1, \infty, \hat{\Omega}}^2 |v|_{2, p, \Omega} + \dots$$

$$\dots + |F|_{2, \infty, \hat{\Omega}} |v|_{1, p, \Omega})$$

où J_F est le jacobien de F .

$$(0-21) \quad |F|_{\ell, \infty, \hat{\Omega}} = \sup_{\hat{x} \in \hat{\Omega}} \|D^{\ell} F(\hat{x})\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)}.$$

Lemme (0-6) :

On suppose donnée une famille régulière de triangulation (τ_h) , F_K la transformation bijective qui envoie $\hat{K}$ sur K , h_K étant le diamètre de K , supposé assez petit. Alors il existe une constante C telle que :

$$(0-22) \quad |F_K|_{1, \infty, \hat{K}} \leq C h_K$$

$$(0-23) \quad |F_K|_{2, \infty, \hat{K}} \leq C Z_K$$

$$(0-24) \quad (\inf J_{F_K}(\hat{x}))^{-1} \leq C h_K^{-2}$$

Z_K étant la distance entre les milieux des diagonales du quadrilatère convexe K de la triangulation (τ_h) .

3 - ELEMENT FINI ET ELEMENT FINI DE REFERENCE :

a) Rappelons tout d'abord quelques définitions générales. (Cf CILARLET [5,6]).

Un ensemble $\Sigma_K = \{\mathcal{L}_i\}_{i=1, \dots, N}$ de N formes linéaires sur un espace vectoriel P_K de fonctions définies sur un domaine K est dit P_K -unisolvant si et seulement si pour toute donnée de N scalaires α_i , $i = 1, \dots, N$, il existe une fonction $v \in P_K$ et une seule telle que l'on ait, pour tout $i = 1, \dots, N$, $\mathcal{L}_i(v) = \alpha_i$.

Les données du domaine K, de l'espace P_K des fonctions définies sur K et l'ensemble $\Sigma_K - P_K$ unisolvant, définissent ce que l'on appelle l'élément fini (K, P_K, Σ_K) .

Les quantités $\mathcal{L}_i(v)$ sont appelées degrés de liberté de la fonction v de P_K . Les fonctions $v^{(i)} \in P_K$, $i = 1, \dots, N$ vérifiant,

$$(0-25) \quad \forall j = 1, \dots, N \quad \mathcal{L}_j(v^{(i)}) = \delta_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

sont appelées fonctions de bases (ou parfois appelées fonctions formes).

On note $(\tau_h)_h$ une triangulation du domaine $\bar{\Omega}$ telle que $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \tau_h} K$,

X_h l'espace d'élément fini associé à cette triangulation, qui est de dimension finie, et V_h est le sous-espace de X_h avec les conditions aux limites.

On dira qu'un élément fini (K, P_K, Σ_K) est de classe C^0 si :

- (i) l'inclusion $P_K \subset C^0(K)$ est vraie.
- (ii) pour tout couple d'éléments K_1, K_2 de $(\tau_h)_h$ adjacents, la restriction $v|_{K_1}$ et $v|_{K_2}$ coïncide le long de la face commune K'

à K_1 et à K_2 , pour toute fonction v_h de l'espace d'élément fini X_h .

Il est légitime d'écrire : $X_h \subset C^0(\bar{\Omega})$.

On dira qu'un élément fini (K, P_K, Σ_K) est de classe C^1 si,

(i) l'inclusion $P_K \subset C^1(K)$ est vraie.

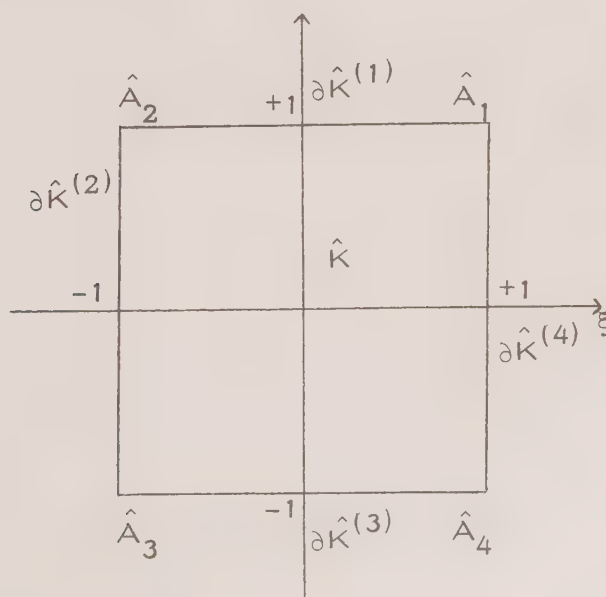
(ii) pour tout couple (K_1, K_2) d'éléments de la triangulisation $(\tau_h)_h$, et pour tout v_h élément de l'espace d'élément fini X_h , la restriction $v_h|_{K_1}$ et $v_h|_{K_2}$ coïncident le long de la face commune K' à K_1 et à K_2 , et les dérivées normales extérieures $\partial_\nu v_h|_{K_1}$ et $\partial_\nu v_h|_{K_2}$ ont une somme $\partial_\nu v_h|_{K_1} + \partial_\nu v_h|_{K_2} = 0$ le long de la face commune K' .

On écrira encore : $X_h \subset C^1(\bar{\Omega})$.

b) Elément fini de référence : $n = 2$.

Nous nous intéressons surtout aux éléments finis quadrilatéraux.

Soit $\hat{K} = \{(\xi, \eta), -1 \leq \xi, \eta \leq 1\}$ le carré unité de sommet $\hat{A}_i$, $i = 1, \dots, 4$ de coordonnées respectives $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$.



Nous notons $\partial \hat{K}^{(i)}$ les côtés $[\hat{A}_i, \hat{A}_{i+1}]$, $i = 1, \dots, 4$, et par convention, si $i = 4$, $\hat{A}_{i+1} = \hat{A}_1$ et si $i = 1$ $\hat{A}_{i-1} = \hat{A}_4$.

A tel carré $\hat{K}$ de référence, on associe l'élément fini $(\hat{K}, \hat{P}_K, \hat{\Sigma}_K)$.

c) Isomorphismes subordonnés à un changement de variable.

Soit $\hat{\Omega}$ un ouvert borné d'un espace euclidien $\hat{O}$, $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ de frontière $\partial \hat{\Omega} = \hat{\Gamma}$ lipschitzienne, le vecteur unitaire de la normale extérieure à $\hat{\Omega}$ est noté $\hat{\nu} = \hat{\nu}(\hat{x})$ et $d\hat{\gamma}$ est la mesure superficielle induite sur $\hat{\Gamma}$ par la mesure de Lebesgue $d\hat{x} = d\hat{x}_1, \dots, d\hat{x}_n$.

On suppose qu'il existe un C^1 -difféomorphisme du compact $\bar{\bar{\Omega}}$ sur $\bar{\Omega}$. Le point $x = (x_1, \dots, x_n)$ désignera systématiquement l'image par F du point $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$:

$$(0-26) \quad x = F(\hat{x})$$

Soit pour $i = 1, \dots, n$; $x_i = F_i(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$.

La matrice jacobienne de F est notée $DF = DF(\hat{x})$, c'est la matrice à n lignes et n colonnes de terme général

$$(0-27) \quad (DF)_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial \hat{x}_j}.$$

Cette matrice $DF(\hat{x})$ représente dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, l'application linéaire tangente de l'application F au point $\hat{x}$.

La matrice inverse est liée à la matrice jacobienne de l'application réciproque par la relation $(DF)^{-1} = D(F^{-1}) \circ F$.

Nous désignerons par $|DF|_{0, \infty, \hat{\Omega}}$ la norme de $L^\infty(\hat{\Omega})$ de la fonction $\hat{x} \rightarrow \|DF(\hat{x})\|$, où $\|DF(\hat{x})\|$ est la norme spectrale de la matrice $DF(\hat{x})$

$$(0-28) \quad |DF|_{0, \infty, \hat{\Omega}} = \sup_{\hat{x} \in \hat{\Omega}} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{|DF(\hat{x}) \xi|}{|\xi|}$$

où $|\xi|$ est la norme euclidienne du vecteur $\xi \in \mathbb{R}^n$. De même :

$$\begin{aligned} (0-29) \quad |DF^{-1}|_{0,\infty,\Omega} &= \sup_{\hat{x} \in \hat{\Omega}} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{|(DF(\hat{x}))^{-1} \xi|}{|\xi|} \\ &= \sup_{x \in \Omega} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{|D(F^{-1}(x)) \xi|}{|\xi|} \end{aligned}$$

Nous notons $J = J(\hat{x})$ la valeur absolue du déterminant du jacobien de l'application F au point $\hat{x}$

$$(0-30) \quad J = |\det DF(\hat{x})|$$

et J_ν , la quantité définie par

$$(0-31) \quad J_\nu = J |{}^t(DF)^{-1} \cdot \vec{\nu}| \quad \text{où } {}^t(DF)^{-1} \text{ est la matrice transposée de la matrice inverse de } DF.$$

Les résultats classiques sur le changement de variable sont rappelés au lemme (0-7).

Lemme (0-7) :

On a pour toute fonction $\varphi \in L^1(\Omega)$

$$(0-32) \quad \int_{\Omega} \varphi dx = \int_{\hat{\Omega}} \varphi \circ F J d\hat{x}$$

et pour toute fonction $\psi \in L^1(\Gamma)$

$$(0-33) \quad \int_{\Gamma} \psi d\gamma = \int_{\hat{\Gamma}} \psi \circ F J_\nu d\hat{\gamma}$$

A partir du C^1 -difféomorphisme F , on construit un isomorphisme $\mathfrak{F} : A$ toute fonction $\hat{v} : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, nous associons $v = \mathfrak{F}(\hat{v}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$(0-34) \quad v \circ F = \hat{v} \quad \text{ie } v(x) = \hat{v}(\hat{x}).$$

d) Eléments finis quadrilatéraux : $n = 2$.

A tout quadrilatère convexe K de sommet A_i , $i = 1, \dots, 4$, il existe

une application F_K et une seule

$$(0-35) \quad \hat{x} \in \hat{K} \rightarrow F_K(\hat{x}) = (F_K^{(1)}(\hat{x}), F_K^{(2)}(\hat{x})) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{telle que} \quad \forall i=1,2 \quad F_K^{(i)} \in Q_1$$

$$\forall j=1,\dots,4 \quad F_K(\hat{A}_j) = A_j.$$

Donc, à l'élément fini de référence $(\hat{K}, \hat{P}_{\hat{K}}, \hat{\Sigma}_{\hat{K}})$ nous associons l'élément fini (K, P_K, Σ_K) défini par :

$$(0-36) \quad \left\{ \begin{array}{l} K = F_K(\hat{K}) \\ P_K = \{p : K \rightarrow \mathbb{R}, p = \hat{p} \circ F_K^{-1}, \forall \hat{p} \in \hat{P}_K\} \\ \mathcal{L}_i(v) = \hat{\mathcal{L}}_i(\hat{v}) \text{ pour tout } \hat{\mathcal{L}}_i \in \hat{\Sigma}_K \text{ et pour tout } \hat{v} = v \circ F_K \in \hat{P}_K. \end{array} \right.$$

Nous utiliserons constamment par la suite les bijections

$$\cdot \hat{x} \in \hat{K} \rightarrow x = F_K(\hat{x}) \in K, x \in K \rightarrow \hat{x} = F_K^{-1}(x) \in \hat{K}$$

$$\cdot \hat{p} \in \hat{P}_K \rightarrow p = \hat{p} \circ F_K^{-1} \in P_K, p \in P_K \rightarrow \hat{p} = p \circ F_K \in \hat{P}_K.$$

Si (x_i, y_i) , $1 \leq i \leq 4$, désigne les coordonnées des sommets A_i , $1 \leq i \leq 4$ du quadrilatère convexe K non dégénéré, l'application F_K sera définie

$$(0-37) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\xi, \eta) \in \hat{K} \rightarrow F_K(\xi, \eta) = (x, y) = (F_K^{(1)}(\xi, \eta), F_K^{(2)}(\xi, \eta)) \in K \\ x = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} x_1 + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} x_2 + \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} x_3 + \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} x_4 \\ y = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} y_1 + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} y_2 + \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} y_3 + \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} y_4 \end{array} \right.$$

Définition (0-1) :

Si v est une fonction continue sur K , la fonction, appelée fonction P_K -interpolée de la fonction v , est la fonction définie par

$$(0-38) \quad \begin{cases} \Pi_K v \in P_K \\ \forall \mathcal{L}_i \in \Sigma_K \quad \mathcal{L}_i(\Pi_K v) = \mathcal{L}_i(v) \end{cases}$$

D'après les théorèmes d'injection de Sobolev (en dimension $n=2$), Π_K se prolonge en un opérateur linéaire continu de $H^{m+1}(K)$, $m \geq 1$, dans $H^1(K)$.

On définit l'opérateur Π_h -interpolé.

Définition (0-2) :

Π_h est l'opérateur qui associe à une fonction v continue sur $\bar{\Omega}$, la fonction $\Pi_h v$ définie par

$$(0-39) \quad (\Pi_h v)|_K = \Pi_K(v|_K), \quad \Pi_h v \in X_h.$$

Définition (0-3) :

On dit qu'une famille de triangulation $(T_h)_h$ (en quadrilatères) est régulière si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) Tous les éléments finis de la triangulation sont équivalents à un seul élément fini de référence $(\hat{K}, \hat{P}_K, \hat{\Sigma}_K)$.

(0-40) (ii) $h = \max \{h_K, K \in T_h\}$ où $h_K = \text{diamètre de } K$; h tend vers zéro.

(iii) Il existe deux constantes γ et σ telles que

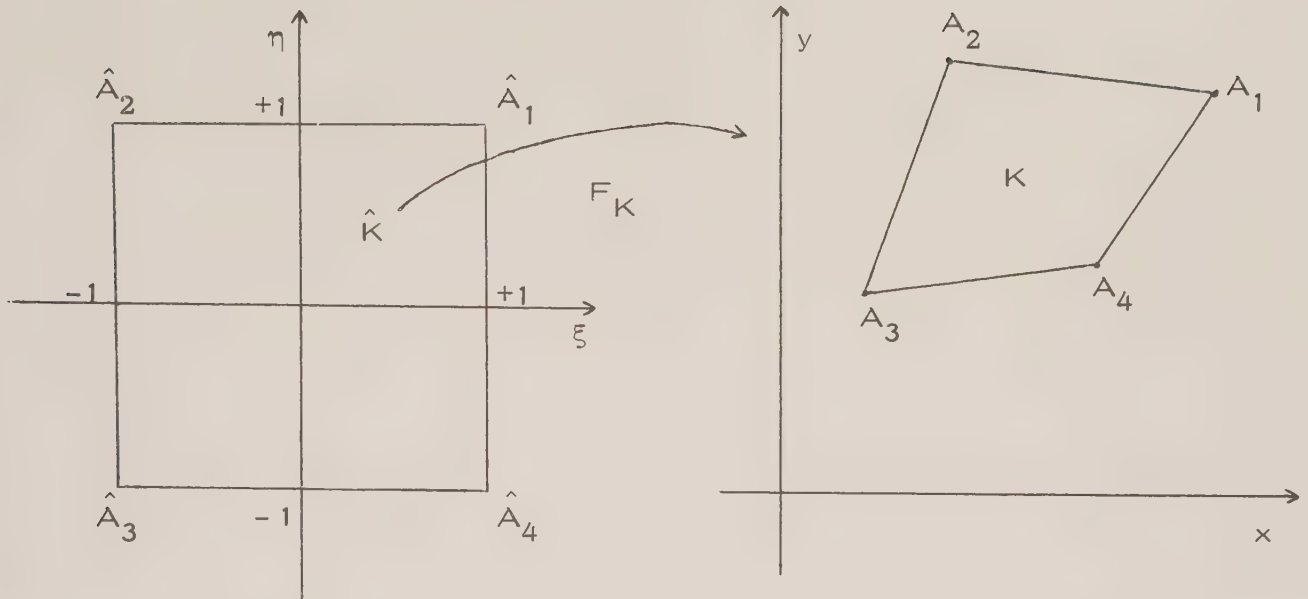
$$(0-41) \quad \forall h, \forall K \in (T_h), \quad \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma \quad \text{et} \quad \max_{1 \leq i \leq 4} |\cos \theta_i^K| \leq \gamma, \quad 0 < \gamma < 1 \quad \text{et} \quad \sigma > 0$$

où θ_i , les angles intérieurs du quadrilatère convexe K , et $\rho_K = \sup \{ \text{diamètres des cercles inscrits dans } K \}$.

Remarque (0-1) :

Explicitons la quantité (0-31). $J_v = J \left| (D_K^T)^{-1} \vec{v} \right|$ dans le cas de quadri-

latère convexe K , de la triangulation $(\tau_h)_h$.



A tout quadrilatère convexe K de sommet $A_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, 4$, on sait qu'il existe une application F_K et une seule

$(\xi, \eta) \in \hat{K} \rightarrow F_K(\xi, \eta) = (F_K^{(1)}(\xi, \eta), F_K^{(2)}(\xi, \eta)) \in \mathbb{R}^2$ définie par (0-37).

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)\xi + \frac{1}{4}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)\eta + \frac{1}{4}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)\xi\eta \\ y = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + \frac{1}{4}(y_1 - y_2 - y_3 + y_4)\xi + \frac{1}{4}(y_1 + y_2 - y_3 - y_4)\eta + \frac{1}{4}(y_1 - y_2 + y_3 - y_4)\xi\eta \end{cases}$$

La matrice jacobienne de F_K est donnée par

$$DF_K(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Sa matrice inverse est

$$(DF_K(\xi, \eta))^{-1} = \frac{1}{J_K} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

et

$${}^t(DF_K(\xi, \eta))^{-1} = \frac{1}{J_K} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

Par exemple, si on se restreint au côté $[A_4, A_1]$ de la frontière de K , $[A_4, A_1]$ sera transformé par F_K^{-1} en $[\hat{A}_4, \hat{A}_1]$.

Le vecteur de la normale extérieure à $[\hat{A}_4, \hat{A}_1]$ est donné par $\vec{v} = (1, 0)$, noté par $\vec{\hat{v}}_{1,0}$

$$(0-42) \quad {}^t(DF_K(\xi, \eta))^{-1} \cdot \vec{\hat{v}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{1}{4} (x_1 + x_2 - x_3 - x_4) + \frac{1}{4} (x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \xi$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{4} (y_1 + y_2 - y_3 - y_4) + \frac{1}{4} (y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \xi$$

sur le côté $[\hat{A}_4, \hat{A}_1]$, $\xi = 1$

Alors

$$(0-43) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{1}{2} (x_1 - x_4) \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{2} (y_1 - y_4) \end{cases}$$

$$|{}^t(DF_K(\xi, \eta))^{-1} \cdot \vec{\hat{v}}| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}$$

$$(0-44) \quad = \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2}$$

et ce n'est autre que : $\frac{A_1 A_4}{2}$

En regroupant les quantités (0-40) à (0-44), il résulte que

$$(0-45) \quad J_{v_{1,0}} = \frac{J_K}{J_K} \frac{A_1 A_4}{2} = \frac{A_1 A_4}{2}$$

Le calcul se fait de la même manière si nous notons $\hat{v}_{-1,0}$, $\hat{v}_{0,1}$, $\hat{v}_{0,-1}$ les vecteurs normaux extérieurs respectifs aux côtés $[\hat{A}_3, \hat{A}_2]$, $[\hat{A}_2, \hat{A}_1]$, $[\hat{A}_3, \hat{A}_4]$, pour $J_{v_{-1,0}}$, $J_{v_{0,1}}$, $J_{v_{0,-1}}$, nous obtenons

$$J_{v_{-1,0}} = \frac{A_2 A_3}{2}, \quad J_{v_{0,1}} = \frac{A_1 A_2}{2}, \quad J_{v_{0,-1}} = \frac{A_4 A_3}{2}$$

D'une manière générale, nous pouvons écrire

$$(0-46) \quad J_v(\hat{x}) = \frac{|\overrightarrow{A_i A_{i+1}}|}{2}, \quad \hat{x} \in]\hat{A}_i, \hat{A}_{i+1}[.$$

Pour la démonstration des lemmes suivants, nous nous référons à Lesaint [19].

Lemme (0-8) : $n = 2$

Soit (τ_h) une famille régulière de triangulations d'élément de référence $(\hat{K}, \hat{P}_K, \hat{\gamma}_K)$ et soient J_K le jacobien de la transformation F_K qui envoie l'élément de référence $\hat{K}$ sur l'élément K , pour tout $K \in (\tau_h)$ et J_S le jacobien de la restriction de F_K à une 1-face quelconque S de K . Les inégalités suivantes sont satisfaites.

$$(0-47) \quad C_1 \left(\frac{\rho_K}{\eta_K}\right)^2 \leq J_K \leq C_2 \left(\frac{h_K}{\rho_K}\right)^2$$

$$(0-48) \quad \frac{\rho_K}{h_K} \leq J_S \leq \frac{h_K}{\rho_K}$$

où les constantes C_1 et C_2 telles que $0 < C_1 < C_2$ sont indépendantes de h_K et de ρ_K .

Lemme (0-9) :

Soit $(\tau_h)_h$ une famille régulière de triangulation de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, d'élément de référence $(\hat{K}, \hat{P}_K, \hat{\Sigma}_K)$ la transformation F_K , $F_K(\hat{K}) = K$, de jacobien J_K .

Soit une fonction $\hat{u} \in H^k(\hat{K})$, pour tout entier $k \geq 0$, la fonction $u = \hat{u} \circ F_K^{-1}$ appartient à $H^k(K)$ et il existe une constante C indépendante de h telle que :

$$(0-49) \quad [\hat{u}]_{k, \hat{K}} \leq C \left(\inf_{(\xi, \eta) \in \hat{K}} J_K(\xi, \eta) \right)^{-\frac{1}{2}} h_K^k |u|_{k, K} \quad \text{pour } k \geq 0$$

$$(0-50) \quad |\hat{u}|_{k, \hat{K}} \leq C \left[\inf_{(\xi, \eta) \in \hat{K}} J_K(\xi, \eta) \right]^{-\frac{1}{2}} \sum_{\ell=\ell_0}^k h_K^{2\ell-k} Z_K^{k-\ell} |u|_{\ell, K},$$

pour $k \geq 1$, où ℓ_0 est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{k}{2}$, et

$$(0-51) \quad |\hat{u}|_{0, \hat{K}} \leq C \left[\inf_{(\xi, \eta) \in \hat{K}} J_K(\xi, \eta) \right]^{-\frac{1}{2}} |u|_{0, K}$$

On a les inégalités suivantes, connues sous le nom d'hypothèses inverses

$$\left\{ \begin{array}{l} |p|_{1, K} \leq C(h_K)^{-1} |p|_{0, K}, \quad \text{pour tout } p \in P_K \\ |p|_{0, \partial K} \leq C(h_K)^{-1/2} |p|_{0, K}, \quad \text{pour tout } p \in P_K. \end{array} \right.$$

- CHAPITRE 1 -

FORMULATION VARIATIONNELLE DU PROBLEME D'UNE PLAQUE ENCASTREE.
=====

ELEMENT FINI NON CONFORME,
=====

JUSTIFICATION DU PATCH TEST DE B. IRONS [13]
=====

1 - POSITION DU PROBLEME : PROBLEME CONTINU :

Dans tout ce qui suit, on désigne par Ω l'ouvert borné du plan (x, y) et soit Γ sa frontière assez régulière, condition supposée dans le chapitre 0.

On notera γ l'abscisse curviligne le long de Γ , $\frac{\partial}{\partial n}$ ou ∂_n la dérivée le long de la normale extérieure à Γ et $\frac{\partial}{\partial s}$ ou ∂_s la dérivée tangentielle le long de Γ .

Le sous-espace $H_0^2(\Omega)$ de l'espace de Sobolev $H^2(\Omega)$ sera défini par

$$(1-1) \quad H_0^2(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega) \text{ , } v = \frac{\partial}{\partial n} v = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

Nous rappelons que sur l'espace de Sobolev $H_0^2(\Omega)$,

$$(1-2) \quad \text{la semi-norme } |\cdot|_{2,\Omega} = \left\{ \sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega} (\partial^\alpha v)^2 dx dy \right\}^{\frac{1}{2}}$$

est une norme équivalente à la norme

$$(1-3) \quad v \rightarrow \|v\|_{2,\Omega} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} (\partial^\alpha v)^2 dx dy \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Considérons le problème de l'équilibre d'une plaque mince tel qu'il est décrit dans le livre de Landau L. , Lifchitz E. [17] par exemple. En

l'absence de champ de force, la plaque est représentée par l'ensemble $\bar{\Omega}$ du plan supposé horizontal. On note respectivement e, E, σ , l'épaisseur, le module de Young et le coefficient de Poisson de la plaque. La fonction inconnue u , qui représente la côte de la plaque par rapport au plan horizontal lorsqu'une force verticale de densité F est appliquée à cette dernière, rend minimale l'énergie de la plaque qui, pour une côte donnée v , est donnée par l'expression :

$$(1-4) \quad E(v) = \frac{E e^3}{24 (1 - \sigma^2)} \int_{\Omega} \left\{ (\Delta v)^2 + 2(1 - \sigma) \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy - \int_{\Omega} F v dx dy \quad \sigma \neq 1.$$

Si on pose $f = \frac{12(1 - \sigma^2)}{E e^3} F$, l'énergie de la plaque s'écrit (à un

facteur multiplicatif constant près)

$$(1-5) \quad J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v) \quad \text{Ciarlet []}$$

où $(., .)$ est le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ en supposant par conséquent

$f \in L^2(\Omega)$ et où $a(., .)$ est la forme bilinéaire donnée par

$$(1-6) \quad \left\{ \begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \left\{ \Delta u \Delta v + (1 - \sigma) \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right\} dx dy \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \sigma \Delta u \Delta v + (1 - \sigma) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right\} dx dy \\ &= \sigma \int_{\Omega} \Delta u \Delta v + (1 - \sigma) \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=2} \partial^{\alpha} u \partial^{\alpha} v dx dy. \end{aligned} \right.$$

La forme bilinéaire ci-dessus est continue sur $H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ et, de plus, elle est $H_0^2(\Omega)$ -elliptique. Pour le voir, on remarque que

$$a(v, v) = \sigma |\Delta v|_{0, \Omega}^2 + (1 - \sigma) |v|_{2, \Omega}^2.$$

Du fait que l'application sur $H_0^2(\Omega)$, $v \rightarrow \|\Delta v\|_{0, \Omega}$ est une norme équivalente à la norme $\|\cdot\|_{2, \Omega}$ qui à son tour équivalente à $|\cdot|_{2, \Omega}$ et on utilise le fait que physiquement le coefficient de Poisson σ vérifie les inégalités $0 < \sigma < \frac{1}{2}$.

Lemme (1-1) : Existence et unicité de la solution :

Sous les conditions précédentes (Lax-Milgram), il existe une et une seule fonction u dans l'espace $V = H_0^2(\Omega)$ qui réalise le minimum du fonctionnel J , i. e.

$$(1-7) \quad \begin{cases} \text{trouver } u \in V \\ J(u) = \min_{v \in V} J(v) \end{cases}$$

ce qui est équivalent à la formulation variationnelle suivante

$$(1-8) \quad \begin{cases} \text{trouver } u \in V \text{ telle que} \\ a(u, v) = (f, v) \text{ pour tout } v \in V. \end{cases}$$

Interprétation :

Interprétons au moins formellement le problème variationnel (1-8). Utilisons les formules de Green suivantes :

$$(1-9) \quad \int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx \, dy = \int_{\Omega} \Delta^2 u \, v \, dx \, dy - \int_{\Gamma} \frac{\partial \Delta u}{\partial n} \, v \, d\gamma + \int_{\Gamma} \Delta u \frac{\partial v}{\partial n} \, d\gamma$$

et

$$(1-10) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\} dx \, dy \\ &= \int_{\Gamma} \left\{ - \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \frac{\partial v}{\partial n} + \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial s} \frac{\partial v}{\partial s} \right\} d\gamma \end{aligned}$$

$$\text{en utilisant le fait que } \begin{cases} n_x = +\tau_y \\ n_y = -\tau_x \end{cases}.$$

L'expression de la forme bilinéaire (1-6) devient

$$(1-11) \quad \begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \Delta^2 u \cdot v \, dx \, dy + \int_{\Gamma} \left(\Delta u - (1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right) \frac{\partial v}{\partial n} \, d\gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} \Delta u \cdot v \, d\gamma + (1-\sigma) \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial s} \frac{\partial v}{\partial s} \, d\gamma. \end{aligned}$$

Dans ces conditions, si la solution u du problème variationnel (1-8) est suffisamment régulière, elle est aussi la solution du problème de Dirichlet pour l'opérateur biharmonique :

$$(1-12) \quad \begin{cases} \text{trouver } u \text{ dans } V \\ \Delta^2 u = f \quad \text{dans } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

qui est effectivement le modèle "classique" le plus simple pour une plaque encastrée, l'encastrement étant pris en compte par les conditions aux limites de (1-12).

- $u|_{\Gamma} = 0$ ie la plaque ne peut pas bouger
= fixe, sur le bord.
- $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$ ie rigidement encastrée.

Remarque (1-1) :

En ce qui concerne la régularité de la solution u du problème (1-7) ou (1-8), on peut montrer (voir Konrat'ev [16]) que celle-ci appartient à l'espace $H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ dès que l'ensemble $\bar{\Omega}$ est un polygone convexe, ce qui est effectivement souvent le cas des plaques. A cet égard, il est intéressant de remarquer que l'hypothèse " $u \in H^3(\Omega)$ " est aussi l'hypothèse minimale pour les majorations d'erreur.

Remarque (1-2) :

La solution u est indépendante du coefficient de Poisson σ .

2 - ELEMENT FINI NON CONFORME - ELEMENT D'ADINI [1] - CONSTRUCTION DE L'ESPACE V_h DISCRET :

On voudrait construire une approximation u_h de la solution u du problème (1-8).

Définition (1-1) :

- P_k , k entier ≥ 0 est l'espace des polynômes en x, y de degré inférieur ou égal à k en toutes les variables, ce qui équivaut à écrire

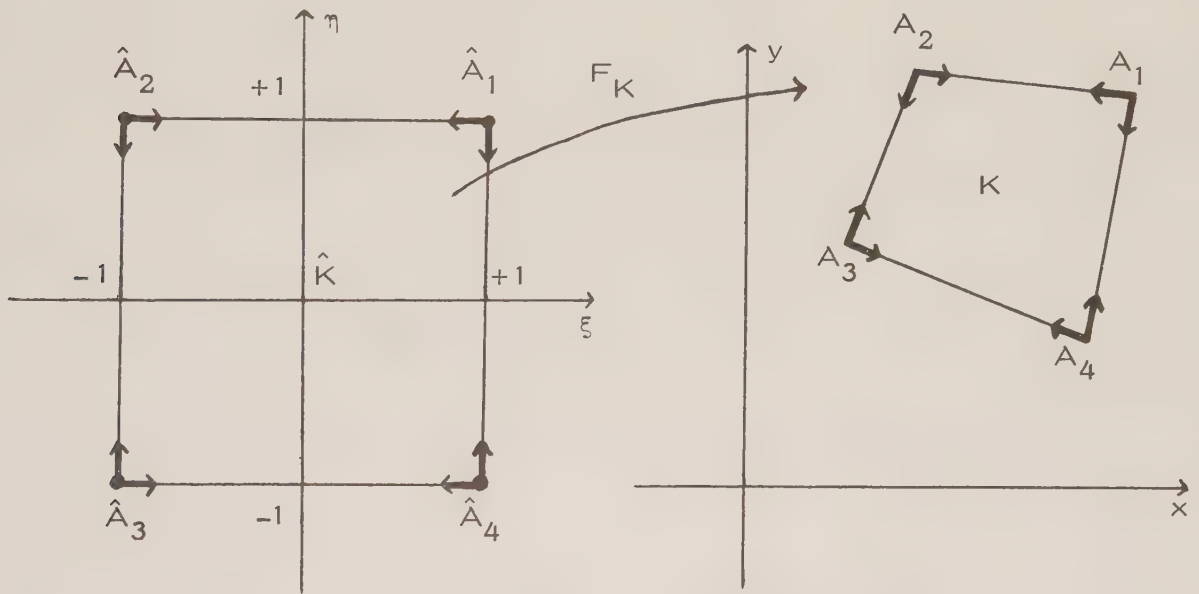
$$(1-13) \quad \forall p \in P_k, \quad p = \sum_{i_1 + i_2 \leq k} a_{i_1, i_2} x^{i_1} y^{i_2}.$$

- Q_k est l'espace des polynômes en x, y de degré inférieur ou égal à k par rapport à chacune des variables

$$(1-14) \quad \text{ie } \forall q \in Q_k, \quad q = \sum_{i_1, i_2 \leq k} \alpha_{i_1, i_2} x^{i_1} y^{i_2}.$$

Le domaine Ω étant supposé polyédrique,

a) Soit $(\tau_h)_h$ une triangulation régulière de $\bar{\Omega}$ en quadrilatères convexes K de diamètre $\leq h_k$.



$\hat{K} = [-1, +1]^2$ étant le carré de référence unité et K s'obtient par la transformation bijective de $\hat{K}$

$F_K : (\xi, \eta) \in \hat{K} \longrightarrow (x, y) \in K$ définie par

$$(1-15) \quad F_K(\xi, \eta) = \begin{cases} x = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} x_1 + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} x_2 + \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} x_3 \\ \quad + \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} x_4 \\ y = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} y_1 + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} y_2 + \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} y_3 \\ \quad + \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} y_4 \end{cases}$$

où (x_i, y_i) sont les coordonnées de A_i , $1 \leq i \leq 4$.

L'élément fini associé à cette triangulation est (K, P_K, Σ_K) défini par

$$(1-16) \quad P_K = \{p ; p = \hat{p} \circ F_K^{-1} \text{ pour tout } \hat{p} \in \hat{P}_K\}$$

$$(1-17) \quad \Sigma_K = \{p(A_i), 1 \leq i \leq 4, \partial_1 p(A_i), \partial_2 p(A_i), 1 \leq i \leq 4\}$$

$$(1-18) \quad \text{où } \hat{P}_K = \{\hat{P}_3(K) \cup \{\xi^3 \eta\} \cup \{\xi \eta^3\}\}$$

$$(1-19) \quad \hat{\Sigma}_K = \{\hat{p}(\hat{A}_i), 1 \leq i \leq 4, \partial_1 \hat{p}(\hat{A}_i), \partial_2 \hat{p}(\hat{A}_i), 1 \leq i \leq 4\}.$$

$\hat{\Sigma}_K$ est l'ensemble $\hat{P}_K$ -unisolvant du fait qu'on a pu arriver à exhiber une base de l'espace $\hat{P}_K$ de dimension finie, $\dim \hat{P}_K = 12$.

Les fonctions de base sont données :

$$(1-20) \quad \begin{cases} \hat{\phi}_1(\xi, \eta) = \frac{(1+\xi)}{4} (1+\eta) \left(1 + \frac{\xi+\eta}{2} - \frac{\xi^2+\eta^2}{2}\right) \\ \hat{\phi}_{12}(\xi, \eta) = \frac{(1+\eta)(1+\xi)^2(1-\xi)}{8} \\ \hat{\phi}_{14}(\xi, \eta) = \frac{(1+\xi)(1+\eta)^2(1-\eta)}{8} \end{cases}$$

Les autres éléments de base s'obtiennent de ceci en changeant ξ en $-\xi$ ou (et) η en $-\eta$.

Alors, nous pouvons écrire :

$$(1-21) \quad \forall \hat{p} \in \hat{P}_K \quad \hat{p} = \sum_{i=1}^4 \hat{p}(\hat{A}_i) \hat{\phi}_i + \sum_{(i,j) \in I} \overrightarrow{D\hat{p}(\hat{A}_i)} \cdot \overrightarrow{\hat{A}_i \hat{A}_j} \hat{\phi}_{ij}$$

où $I = \{(i, j) ; i, j \leq 4 \quad i \neq j \quad |i-j| = 1 \text{ ou } 3\}$

et si nous notons $p_i = p(A_i)$, nous pouvons écrire encore :

$$(1-22) \quad \text{Pour tout } p \in P_K, \quad p = \sum_{i=1}^4 p_i \varphi_i + \sum_{(i,j) \in I} \overrightarrow{Dp(A_i)} \cdot \overrightarrow{A_i A_j} \varphi_{ij}$$

$$\text{où } \varphi_i(x, y) = \hat{\phi}_i \circ F_K^{-1}(x, y); 1 \leq i \leq 4; \varphi_{ij}(x, y) = \hat{\phi}_{ij} \circ F_K^{-1}(x, y), (i, j) \in I.$$

Pour toute fonction $v(x, y)$ définie sur K , on fait correspondre $\hat{v}(\xi, \eta)$ sur $\hat{K}$ par

$$(1-23) \quad \hat{v}(\xi, \eta) = v(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)).$$

b) L'espace d'éléments finis V_h :

A l'élément fini (K, P_K, Σ_K) , nous allons associer un espace d'éléments finis V_h dont les fonctions v_h sont définies par :

(i) pour chaque $K \in (\tau_h)_h$, la restriction $v_h|_K \in P_K$.

(ii) chaque fonction $v_h \in V_h$ est définie par les valeurs et les valeurs des dérivées premières aux sommets du quadrilatère.
ie définis sur $\Sigma_K - P_K$ unisolvant

(iii) Pour tout $v_h \in V_h$, pour tout b , noeud frontière de Γ

$$v_h(b) = \partial_1 v_h(b) = \partial_2 v_h(b) = 0$$

On remarque que le long de chaque côté K' du rectangle d'Adini K , la restriction $p|_{K'}$ du tout $p \in P_K$ est un polynôme de degré ≤ 3 à une variable, ainsi tel polynôme sera déterminé uniquement par les valeurs et les valeurs de la dérivée première aux points extrêmes de K' .

Donc, le long d'une face commune K' à deux rectangles d'Adini adjacents, la restriction $v_h|_{K_1}$ et $v_h|_{K_2}$ coïncide le long de cette face, pour toute fonction v_h de l'espace V_h .

Donc, les fonctions de V_h sont continues sur $\bar{\Omega}$ s'annulant sur la frontière Γ , mais, en général, non continuellement différentielles.

Nous pouvons conclure que le rectangle d'Adini est un élément fini de classe C^0 et non de classe C^1 .

En résumé, nous avons construit un espace d'éléments finis V_h dont les fonctions v_h satisfont

$$(1-24) \quad \begin{cases} v_h \in H_o^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), v_h|_K \in P_K \subset H^2(K) \text{ pour tout } K \in (\tau_h)_h. \\ \partial_\nu v_h(b) = 0 \text{ pour tout noeud frontière.} \end{cases}$$

Ainsi, $V_h \subset H_0^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ est non inclus dans $H_0^2(\Omega) = V$ l'espace de départ d'où le nom que l'espace V_h construit à partir d'éléments d'Adini est non conforme.

3 - PROBLEME DISCRET : EXISTENCE ET UNICITE DE LA SOLUTION :

Etant donné l'espace de dimension finie V_h , le problème discret consiste :

$$(1-25) \quad \begin{cases} \text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a_h(u_h, v_h) = (f, v_h) \text{ pour tout } v_h \in V_h \end{cases}$$

où la forme bilinéaire approximative $a_h(\cdot, \cdot)$ est définie par

$$(1-26) \quad a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in \tau_h} \int_K \left\{ \Delta u_h \Delta v_h + (1-\sigma) \left(2 \frac{\partial^2 u_h}{\partial x \partial y} \frac{\partial v_h}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_h}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2} \right) \right\} dx dy$$

pour tout $u_h, v_h \in V_h$.

Nous observons que ceci est justifié par l'inclusion $P_K \subset H^2(K)$ qui est donnée par (1-24). L'idée naturelle est de munir V_h de la norme de V , or ceci n'est pas possible du fait que $V_h \not\subset V = H_0^2(\Omega)$.

Donc, il s'avère nécessaire de définir une norme sur V_h .

Nous définissons :

$$(1-27) \quad v_h \longrightarrow \|v_h\|_h = \left\{ \sum_{K \in \tau_h} |v_h|_{2,K}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

En réalité, $v_h \longrightarrow \|v_h\|_h$ est une semi-norme et non une norme.

Lemme (1-2) :

Sur l'espace V_h de dimension finie, l'application $v_h \longrightarrow \|v_h\|_h$ est bien une norme.

Démonstration :

$$\|v_h\|_h = 0 \quad \text{ie} \quad \left\{ \sum_{K \in \tau_h} |v_h|_{2,K}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0, \quad \text{ie} \quad |v_h|_{2,K} = 0$$

$$\text{ie} \quad \int_K \left\{ \left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy = 0$$

ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v_h}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{sur } K.$$

K étant convexe, donc connexe,

$$\frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2} = 0 \quad \text{entraîne que} \quad \frac{\partial v_h}{\partial x} = C_1 \Phi(y), \quad \text{où } C_1 \text{ est une constante}$$

$$\frac{\partial^2 v_h}{\partial y \partial x} = 0 \Rightarrow C_1 \frac{\partial \Phi(y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow \Phi(y) = C_2.$$

Cela veut dire que $\frac{\partial v_h}{\partial x} = C$, C est une constante par rapport à x et y. De même $\frac{\partial v_h}{\partial y}$ sera constant par rapport à x et y, donc sont des constantes sur chaque K.

Sur la frontière Γ on a $\frac{\partial v_h}{\partial x}(b) = \frac{\partial v_h}{\partial y}(b) = 0$ d'où $\frac{\partial v_h}{\partial x} = \frac{\partial v_h}{\partial y} = 0$ sur tout élément K de τ_h , c'est-à-dire que v_h est constante sur tout K, sur tout $\bar{\Omega}$.

Or $V_h \subset H_0^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ ce qui donne $v_h \equiv 0$.

C. Q. F. D.

Lemme (1-3) :

On suppose que l'espace V_h est muni de la norme (1-27). Alors le problème discret :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h \in V_h \\ a_h(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \text{pour tout } v_h \in V_h \end{cases}$$

admet une solution unique.

La démonstration est évidente.

La forme bilinéaire $a_h(., .)$ est continue et il suffit de remarquer que

$$(1-28) \quad (1-\sigma) \|v_h\|_h^2 \leq a_h(u_h, v_h)$$

donc uniformément V_h -elliptique.

La conclusion est donnée par Lax Milgram.

4 - ESTIMATION DE L'ERREUR DE CONSISTANCE, PATCH TEST B. IRONS [13] :

Nous allons donner un théorème qui existait déjà et dont on rappelle la démonstration.

Théorème (1-1) : Strang [24, 25]

Considérons la famille des problèmes discrets pour lesquels les formes bilinéaires approchées sont uniformément V_h -elliptiques avec $v_h \rightarrow \|v_h\|_h$ la norme sur V_h .

Soient u_h solution du problème discret (1-25) et u solution du problème continu (1-8).

Alors il existe une constante C indépendante de V_h telle que :

$$(1-29) \quad \|u - u_h\|_h \leq C \left[\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a_h(u_h, w_h) - f(w_h)|}{\|w_h\|_h} \right]$$

u supposé dans $H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$.

Démonstration :

De la définition de $a_h(., .)$ et $\|v_h\|_h$ sur V_h on déduit qu'il existe $\tilde{\alpha} = (1-\sigma)$ indépendante de V_h telle que $a_h(v_h, v_h) \geq \tilde{\alpha} \|v_h\|_h^2$ pour tout $v_h \in V_h$.

Une simple application de l'inégalité de Cauchy Schwarz montre qu'il existe une constante M indépendante de l'espace V_h telle que

$$|a_h(u_h, v_h)| \leq M \|u_h\| \|v_h\| \text{ pour tout } u_h, v_h \in V_h.$$

Soit $w_h = u_h - v_h$.

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} \|w_h\|_h^2 &\leq a_h(w_h, w_h) = a_h(u - v_h, w_h) + a_h(u_h, w_h) - a_h(u, w_h) \\ &= a_h(u - v_h, w_h) + (f, w_h) - a_h(u, w_h) \\ &\leq M \|u - v_h\|_h \|w_h\| + |(f, w_h) - a_h(u, w_h)| \end{aligned}$$

de sorte que

$$\|w_h\|_h \leq \frac{M}{\tilde{\alpha}} \|u - v_h\|_h + \frac{1}{\tilde{\alpha}} \frac{|(f, w_h) - a_h(u, w_h)|}{\|w_h\|_h}.$$

Cette dernière inégalité jointe à l'inégalité triangulaire

$\|u - u_h\|_h \leq \|u - v_h\|_h + \|w_h\|_h$ conduit à

$$\|u - u_h\|_h \leq C \left[\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|(f, w_h) - a_h(u_h, w_h)|}{\|w_h\|_h} \right]$$

où $C = \max \left(1 + \frac{M}{\tilde{\alpha}}, \frac{1}{\tilde{\alpha}} \right)$ qui est indépendante de h

C. Q. F. D.

Remarques (1-3) :

. $\sup_{w_h \in V_h} \frac{|(f, w_h) - a_h(u, w_h)|}{\|w_h\|_h}$ est appelé terme de consistance.

. L'inégalité (1-29) n'est qu'une généralisation de l'inégalité de la majoration d'erreur dans les méthodes conformes, puisque, si on note $E_h(u, w_h) = (f, w_h) - a_h(u, w_h)$ cette quantité sera nulle pour tout $w_h \in V_h$ dès que l'inclusion $V_h \subset V$ a lieu ce qui est le cas des méthodes conformes.

Intéressons-nous à ce terme de consistance, plus particulièrement au terme $E_h(u, w_h)$.

$$\begin{aligned} E_h(u, w_h) &= (f, w_h) - a_h(u, w_h) \\ &= \sum_{K \in \tau_h} \left\{ \int_K \Delta^2 u w_h \, dx \, dy - \int_K \Delta u \Delta w_h + (1 - \sigma) \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_h}{\partial x \partial y} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_h}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_h}{\partial x^2} \right) dx \, dy \right\}. \end{aligned}$$

Par application des formules de Green (1-9), (1-10) sur chaque K , nous aurons :

$$(1-30) \quad E_h(u, w_h) = \sum_{K \in \tau_h} \int_{\partial K} \left((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u \right) \cdot \frac{\partial w_h}{\partial n} d\gamma$$

$$+ \sum_{K \in \tau_h} \left\{ \int_{\partial K} \frac{\partial}{\partial n} (\Delta u) \cdot w_h d\gamma + (1-\sigma) \int_{\partial K} \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial s} \frac{\partial w_h}{\partial s} d\gamma \right\}.$$

L'expression (1-30) peut s'écrire :

$$(1-31) \quad E_h(u, w_h) = E_h^0(u, w_h) + E_h^1(u, w_h) \quad \text{où}$$

$$E_h^0(u, w_h) = \sum_{K \in \tau_h} \int_{\partial K} \left((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u \right) \cdot \frac{\partial w_h}{\partial n} d\gamma$$

$$(1-32) \quad E_h^1(u, w_h) = \sum_{K \in \tau_h} \left\{ \int_{\partial K} \frac{\partial}{\partial n} (\Delta u) w_h d\gamma + (1-\sigma) \int_{\partial K} \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial s} \frac{\partial w_h}{\partial s} d\gamma \right\}$$

. Nous remarquons que pour $V_h \subset C^0(\bar{\Omega})$, l'expression $E_h^1(u, w_h) \equiv 0$ donc, $E_h(u, w_h)$ se réduit à $E_h(u, w_h) = E_h^0(u, w_h)$ qui est une forme bilinéaire définie sur $H^3(\Omega) \times V_h$.

En effet :

Soient $u \in H^3(\Omega)$, $w_h \in V_h$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \tau_x + \frac{\partial u}{\partial y} \tau_y \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tau_x^2 + \frac{2 \partial^2 u}{\partial x \partial y} \tau_x \tau_y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tau_y^2$$

donc si $u \in H^3(\Omega)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \in H^1(\Omega), \text{ leurs traces}$$

appartiennent à $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ qui est un Hilbert $\subset L^2(\Gamma)$.

En conclusion, pour notre espace d'éléments finis $V_h \subset C^0(\bar{\Omega})$,

nous avons

$$(1-33) \quad E_h(u, w_h) = (f, w_h) - a_h(u, w_h) \\ = \sum_{K \in \tau_h} \int_{\partial K} \left((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u \right) \frac{\partial w_h}{\partial n} d\gamma.$$

Majoration d'erreur :

D'après la théorie d'interpolation, le terme $\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h$ qui

intervient dans le théorème de majoration d'erreur (1-1) se majore par

$$(1-34) \quad \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h \leq ch |u|_{3, \Omega}, \text{ en supposant l'inclusion}$$

"minimale" $P_2 \subset P_K$ et $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$.

Donc, l'idée naturelle est de montrer que le terme $E_h(u, w_h)$ est de même ordre de convergence que le terme (1-34) ; cela revient à trouver une constante c indépendante de h et telle que :

$$(1-35) \quad |E_h(u, w_h)| \leq ch |u|_{3, \Omega} \|w_h\|_h \text{ pour tout } u \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \\ \text{et } w_h \in V_h.$$

Effectivement, P. Lascaux, P. Lesaint [18] dans le cas de l'élément d'Adini rectangulaire, ont montré qu'un tel élément fini passe le Patch Test.

$$(1-36) \quad \text{Cela veut dire que } E_h(u, w_h) = 0 \text{ pour tout } u \in P_2 \text{ et } w_h \in V_h \\ \text{et que l'inégalité du type}$$

$$(1-37) \quad |E_h(u, w_h)| \leq ch |u|_{3, \Omega} \|w_h\|_h \text{ pour tout } u \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \\ \text{et } w_h \in V_h, \text{ est bien satisfaite.}$$

5 - CRITERE DE PATCH TEST DANS LE CAS DU QUADRILATERE CONVEXE :

Le problème qui se pose est le suivant : comment les résultats (1-36) et (1-37) peuvent-ils changer, dans le cas où on triangulise le domaine Ω en quadrilatères convexes K de diamètre $\leq h_K$?

(1-37) Pour tout $K \in \tau_h$, on a l'inégalité $Z_K \leq ch_K^2$ où Z_K = distance entre les milieux des diagonales de K .

Lemme (1-4) :

On suppose que le domaine Ω est triangualisé en quadrilatères convexes K . Alors le critère de Patch Test,

$E_h(u, w_h) = 0 \quad \forall u \in P_2 \text{ et } w_h \in V_h$, n'est pas satisfait en général.

Avant de donner la démonstration de ce lemme, nous allons démontrer le lemme suivant.

Soit $Q_1(K) = \{p = \hat{p} \circ F_K^{-1}, \hat{p} \in Q_1(\hat{K})\}$ où $Q_1(\hat{K})$ désigne l'espace des polynômes de la forme $a + b\xi + c\eta + d\xi\eta$.

Lemme (1-5) :

Pour chaque triangulation $(\tau_h)_h$, nous notons un espace d'élément fini Z_h défini par :

(1-38) $Z_h = \{z_h ; z_h|_K \in Q_1(K) \text{ et } z_h(b) = 0 \text{ pour tout } b \text{ noeud frontière}\}.$

On a $Z_h \subset C^0(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$.

Alors, pour tout $v \in H^3(\Omega)$, pour tout $z_h \in Z_h$

(1-39) $E_h(v, z_h) = \sum_{K \in \tau_h} \int_{\partial K} \left((1-\sigma) \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \Delta v \right) z_h|_K d\gamma = 0.$

Démonstration :

d'ailleurs évidente d'après l'inclusion $Z_h \subset H_0^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

En effet, deux cas se présentent.

1er cas : Une partie de ∂K est portée par la frontière Γ .

Soit K' le côté porté par Γ , $z_h|_{K|K'}$ sera un polynôme de la forme $a+bt$ qui s'annule aux deux noeuds frontières, donc identiquement nul.

2ème cas : ∂K n'est pas porté par la frontière Γ .

On a $Z_h \subset C^0(\bar{\Omega})$. Prenons deux quadrilatères quelconques de la triangulation $(\tau_h)_h$, adjacents et de côté commun K' . L'expression (1-39) sera nulle sur ce côté commun lorsqu'on parcourt les frontières de ces deux quadrilatères adjacents, donc en sommant sur tous les cas de la triangulation, tous les termes vont s'annuler deux à deux.

C. Q. F. D.

Démonstration du lemme (1-4) :

Décomposition de $E_h(u, w_h)$:

Nous pouvons écrire, sous forme

$$(1-40) \quad E_h(u, w_h) = \sum_{K \in \tau_h} E_K(u, w_h)$$

$$\text{où } E_K(u, w_h) = \int_{\partial K} \left((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u \right) \frac{\partial w_h}{\partial n} d\gamma$$

et chaque application $E_K(., .)$ apparaît comme une forme bilinéaire sur l'espace $H^3(K) \times P_K$. A son tour, $E_K(u, w_h)$ peut être décomposé

$$(1-41) \quad E_K(u, w_h) = E_{K,x}(u, w_h) + E_{K,y}(u, w_h)$$

$$(1-42) \quad \text{où } E_{K,x}(u, w_h) = \int_{\partial K} \left((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u \right) \frac{\partial w_h}{\partial x} n_{x,K} d\gamma$$

$$(1-43) \quad E_{K,y}(u, w_h) = \int_{\partial K} \left((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u \right) \frac{\partial w_h}{\partial y} n_{y,K} d\gamma.$$

Nous notons :

$$(1-44) \quad E_{h,x}(u, w_h) = \sum_{K \in \tau_h} E_{K,x}(u, w_h)$$

$$(1-45) \quad E_{h,y}(u, w_h) = \sum_{K \in \tau_h} E_{K,y}(u, w_h).$$

Soient A_i $1 \leq i \leq 4$ les quatre sommets du quadrilatère convexe K de la triangulation $(\tau_h)_h$.

Si on note π_K l'opérateur $Q_1(K)$ -interpolé défini par :

$$(1-46) \quad \pi_K \frac{\partial w_h}{\partial x}(A_i) = \frac{\partial w_h}{\partial x}(A_i) \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq 4$$

$$(1-47) \quad \pi_h \frac{\partial w_h}{\partial x}|_K = \pi_K \frac{\partial w_h|_K}{\partial x}, \quad \pi_h \frac{\partial w_h}{\partial x} \text{ est une fonction continue et}$$

même $\pi_h \frac{\partial w_h}{\partial x} \in Z_h$ (Lemme 1-5).

A partir de ceci, nous pouvons écrire :

$$(1-48) \quad \begin{aligned} E_{h,x}(u, w_h) &= \sum_{K \in \tau_h} E_{K,x}(u, w_h) \\ &= \sum_{K \in \tau_h} \int_K \left((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} w_h - \pi_K \frac{\partial w_h}{\partial x} \right) n_{x,K} dy. \end{aligned}$$

Et l'expression (1-41) s'écrit :

$$(1-49) \quad \begin{aligned} E_K(u, w_h) &= \Delta_{x,K}(u, w_h) + \Delta_{y,K}(u, w_h) \quad \text{pour tout } u \in H^3(K) \\ &\quad \text{et } w_h|_K \in P_K \end{aligned}$$

$$(1-50) \quad \text{où } \Delta_{x,K}(u, w_h) = \int_K \left((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} w_h - \pi_K \frac{\partial w_h}{\partial x} \right) n_{x,K} dy$$

$$(1-51) \quad \Delta_{y,K}(u, w_h) = \int_K \left((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} w_h - \pi_K \frac{\partial w_h}{\partial x} \right) n_{y,K} dy.$$

Dans la suite, on note $\pi_K = \pi$, $n_{x,K} = n_x$, $w_h|_K = w_h$

et nous posons $z_h = \frac{\partial}{\partial x} w_h - \pi \frac{\partial w_h}{\partial x}$, $z'_h = \frac{\partial}{\partial y} w_h - \pi \frac{\partial w_h}{\partial y}$.

On s'intéresse en premier lieu à l'expression (1-50).

La contribution des côtés A_1A_4 et A_2A_3 du quadrilatère convexe à l'expression (1-50) s'écrit :

$$\int_{A_4}^{A_1} \left((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u \right) z_h n_x d\gamma - \int_{A_3}^{A_2} \left((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u \right) z_h n_x d\gamma.$$

n_x , sur le côté A_4A_1 est donné par :

$$n_x = \frac{y_1 - y_4}{A_1A_4} \text{ où } A_1A_4 = \sqrt{(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2}.$$

n_x , sur le côté A_3A_2 est donné par :

$$n_x = \frac{y_2 - y_3}{A_2A_3} \text{ où } A_2A_3 = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}.$$

Nous notons ,

$$(1-52) \quad \Delta_{x,K}^1(u, w_h) = \int_{A_4}^{A_1} \left((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u \right) z_h \frac{y_1 - y_4}{A_1A_4} d\gamma \\ - \int_{A_3}^{A_2} \left((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u \right) z_h \frac{y_2 - y_3}{A_2A_3} d\gamma.$$

On revient sur le carré $\hat{K}$ de référence cette expression devient :

$$\Delta_{x,K}^1(u, w_h) = \int_{-1}^{+1} \left((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u \right) \hat{z}_h(1, \eta) J_{v_{1,0}}(1, \eta) \frac{y_1 - y_4}{A_1A_4} d\eta \\ - \int_{-1}^{+1} \left((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u \right) \hat{z}_h(-1, \eta) J_{v_{-1,0}}(-1, \eta) \frac{y_2 - y_3}{A_2A_3} d\eta$$

où $\hat{v}_{1,0} = (1, 0)$; $\hat{v}_{-1,0} = (-1, 0)$ sont les vecteurs normaux extérieurs aux côtés $\hat{A}_1\hat{A}_4$ et $\hat{A}_2\hat{A}_3$.

Dans la remarque (0-1), $J_v = J_K |{}^t(D F_K(\xi, \eta))^{-1} \cdot \vec{v}|$ et $J_K = |\det F_K(\xi, \eta)|$,

et

$J_{v_{1,0}}$, $J_{v_{-1,0}}$ sont donnés par

$$J_{v_{1,0}} = \frac{A_1A_4}{2} ; J_{v_{-1,0}} = \frac{A_2A_3}{2}.$$

Il résulte que :

$$(1-53) \quad \Delta_{x,K}^{(1)}(u, w_h) = \int_{-1}^{+1} \left((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u \right) \hat{z}_h(1, \eta) \frac{y_1 - y_4}{2} d\eta \\ - \int_{-1}^{+1} \left((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u \right) \hat{z}_h(-1, \eta) \frac{y_2 - y_3}{2} d\eta.$$

Posons $g = (1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u$, $\hat{g} = g \circ F_K$.

$$(1-54) \quad \Delta_{x,K}^{(1)}(u, w_h) = \int_{-1}^{+1} \left[\hat{g} \hat{z}_h(1, \eta) \frac{y_1 - y_4}{2} - \hat{g} \hat{z}_h(-1, \eta) \frac{y_2 - y_3}{2} \right] d\eta.$$

Supposons que $u \in P_2$ ie $(1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u = \text{constante}$ donc $\hat{g}$ est une cons-

tante = C

donc

$$(1-55) \quad \Delta_{x,K}^{(1)}(u, w_h) = C \int_{-1}^{+1} \left[\hat{z}_h(1, \eta) \frac{y_1 - y_4}{2} - \hat{z}_h(-1, \eta) \frac{y_2 - y_3}{2} \right] d\eta.$$

Essayons de montrer comment cette quantité ne peut pas être nulle.

Cela revient à calculer $\hat{z}_h(1, \eta)$ et $\hat{z}_h(-1, \eta)$.

L'application F_K qui envoie $\hat{K}$ sur K est donnée par (1-15), $F_K(\xi, \eta) = (x, y)$

$$(1-56) \quad \begin{cases} x = a + b\xi + c\eta + d\xi\eta \\ y = \alpha + \beta\xi + \gamma\eta + \delta\xi\eta \end{cases}$$

où

$$(1-57) \quad \begin{cases} a = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4); b = \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) \\ c = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4); d = \frac{1}{4}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \end{cases}$$

et

$$(1-58) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4); \beta = \frac{1}{4}(y_1 - y_2 - y_3 + y_4) \\ \gamma = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 - y_3 - y_4); \delta = \frac{1}{4}(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \end{cases}$$

et son Jacobien $J_K(\xi, \eta) = |\det DF_K(\xi, \eta)|$

$$(1-59) \quad = (b\gamma - c\beta) + (b\delta - d\beta)\xi + (d\gamma - c\delta)\eta.$$

Nous avons noté $\hat{A}_i = 1, \dots, 4$ les quatre sommets du $\hat{K}$ ayant respectivement pour coordonnées

$$(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1).$$

$$(1-60) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial \xi} (\hat{A}_1) = \frac{1}{2} (y_1 - y_2) = \frac{\partial y}{\partial \xi} (\hat{A}_2) \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} (\hat{A}_3) = \frac{1}{2} (y_3 - y_4) = \frac{\partial y}{\partial \xi} (\hat{A}_4) \end{cases}$$

$$(1-61) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial \eta} (\hat{A}_1) = \frac{1}{2} (y_1 - y_4) = \frac{\partial y}{\partial \eta} (\hat{A}_4) \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} (\hat{A}_3) = \frac{1}{2} (y_2 - y_3) = \frac{\partial y}{\partial \eta} (\hat{A}_2) \end{cases}$$

L'expression (1-59) pourra s'écrire encore :

$$J_K(\xi, \eta) = \frac{1}{16} (A + B\xi + C\eta).$$

Si nous notons :

$$X_1 = 4b ; X_2 = 4d ; X_3 = 4c$$

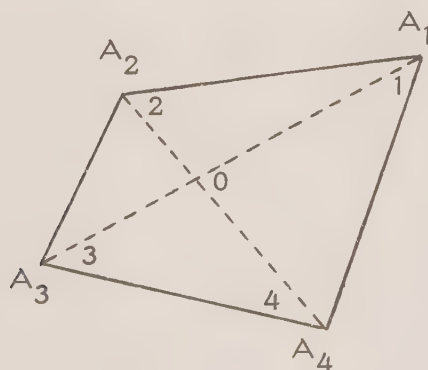
$$Y_1 = 4\beta , Y_2 = 4\delta , Y_3 = 4\gamma$$

nous aurons alors :

$$A = X_1 Y_3 - X_3 Y_1 ; B = X_1 Y_2 - X_2 Y_1$$

$$C = X_2 Y_3 - X_3 Y_2.$$

Pour voir la signification de A, B, C, on définit par $\Delta = \text{mes } K$ ou l'aire totale de l'élément K quadrilatère convexe.



Soit $\Delta_{i,j,k}$ = l'aire du triangle ayant i, j, k comme sommet, figure ci-dessus.

$$(1-62) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Alors } A = 4\Delta, \quad B = 4(\Delta_{3,4,1} - \Delta_{3,4,2}) \\ C = 4(\Delta_{3,1,2} - \Delta_{3,4,2}). \end{array} \right.$$

Pour un rectangle ou un parallélogramme, on aura $B = C = 0$ et dans ce cas, le Jacobien $J_K(\xi, \eta)$ sera une constante $= \frac{1}{4}\Delta$.

Alors on aura :

$$(1-63) \quad J_K(\hat{A}_i)_{i=1,\dots,4} = \frac{1}{4} [\Delta + \epsilon (\Delta_{3,4,1} - \Delta_{3,4,2}) + \theta (\Delta_{3,1,2} - \Delta_{3,4,2})].$$

Les $J_K(\hat{A}_i)$, $i = 1, \dots, 4$ s'obtiennent respectivement pour

$$\epsilon = \theta = 1; \epsilon = -1, \theta = 1; \epsilon = \theta = -1; \epsilon = 1, \theta = -1.$$

Développement du terme

$$\hat{z}_h(1, \eta) = \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial x} - \hat{\pi} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \right) (1, \eta)$$

$\hat{\pi} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x}$ est la fonction continue $Q_1(\hat{K})$ interpolée définie par

$$\hat{\pi} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x}(\hat{A}_i) = \frac{\partial \hat{w}}{\partial x}(\hat{A}_i), \quad i = 1, \dots, 4.$$

Sur le carré de référence et par définition

$$\hat{\pi} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial \hat{w}}{\partial x}(\hat{A}_i) \hat{q}_i.$$

Si nous notons $\hat{x}_i = \frac{\partial \hat{w}}{\partial x}(\hat{A}_i)$ l'ensemble $\{\hat{x}_i\}_{i=1,\dots,4}$ est $Q_1(\hat{K})$ -unisolvant et dont les fonctions de base sont données par

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{q}_1 = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}; \quad \hat{q}_2 = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \\ \hat{q}_3 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}; \quad \hat{q}_4 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \end{array} \right.$$

Alors

$$(1-64) \quad \begin{aligned} \hat{\pi} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} &= \frac{1}{4} (\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \hat{x}_3 + \hat{x}_4) + \frac{\xi}{4} (\hat{x}_1 - \hat{x}_2 - \hat{x}_3 + \hat{x}_4) \\ &+ \frac{\eta}{4} (\hat{x}_1 + \hat{x}_2 - \hat{x}_3 - \hat{x}_4) + \frac{\xi\eta}{4} (\hat{x}_1 - \hat{x}_2 + \hat{x}_3 - \hat{x}_4). \end{aligned}$$

Nous savons que

$$(1-65) \quad \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} = \frac{1}{J_K(\xi, \eta)} \left[\frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right].$$

Un calcul élémentaire montre que pour tout $\hat{w} \in \hat{P}_K = P_3 \cup \{\xi^3 \eta\} \cup \{\xi \eta^3\}$

$$\hat{w}(\xi, \eta) = P_0(\xi) + \eta P_1(\xi) + \eta^2 P_2(\xi) + \eta^3 P_3(\xi)$$

où P_0, P_1 (resp.) P_2, P_3 sont des polynômes de degré ≤ 3 (resp.) ≤ 1 .

$$(1-66) \quad \begin{cases} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} = \frac{\partial P_0(\xi)}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial P_1(\xi)}{\partial \xi} + \eta^2 \frac{\partial P_2(\xi)}{\partial \xi} + \eta^3 \frac{\partial P_3(\xi)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta} = P_1(\xi) + 2\eta P_2(\xi) + 3\eta^2 P_3(\xi). \end{cases}$$

Nous posons : $\alpha_i = \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi}(\hat{A}_i)$, $\beta_i = \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta}(\hat{A}_i)$, $i = 1, \dots, 4$.

On aura :

$$(1-67) \quad \begin{cases} \hat{x}_1 = \left[\frac{1}{2} \alpha_1 (y_1 - y_4) + \frac{1}{2} \beta_1 (y_1 - y_2) \right] \cdot \frac{1}{J_K(\hat{A}_1)} \\ \hat{x}_2 = \left[\frac{1}{2} \alpha_2 (y_2 - y_3) + \frac{1}{2} \beta_2 (y_1 - y_4) \right] \cdot \frac{1}{J_K(\hat{A}_2)} \\ \hat{x}_3 = \left[\frac{1}{2} \alpha_3 (y_2 - y_3) + \frac{1}{2} \beta_3 (y_3 - y_4) \right] \cdot \frac{1}{J_K(\hat{A}_3)} \\ \hat{x}_4 = \left[\frac{1}{2} \alpha_4 (y_1 - y_4) + \frac{1}{2} \beta_4 (y_3 - y_4) \right] \cdot \frac{1}{J_K(\hat{A}_4)} \end{cases}$$

$J_K(\hat{A}_i)$, $i = 1, \dots, 4$ sont donnés par (1-63),

et (1-65) donne

$$\begin{cases} \hat{\pi} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x}(1, \eta) = \frac{1}{2}(\hat{x}_1 + \hat{x}_4) + \frac{\eta}{2}(\hat{x}_1 - \hat{x}_4) \\ \hat{\pi} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x}(-1, \eta) = \frac{1}{2}(\hat{x}_2 + \hat{x}_3) + \frac{\eta}{2}(\hat{x}_2 - \hat{x}_4). \end{cases}$$

(1-56) donne

$$(1-68) \quad \begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial \xi}(1, \eta) = \beta + \delta\eta = \frac{\partial Y}{\partial \xi}(-1, \eta) \\ \frac{\partial Y}{\partial \eta}(1, \eta) = \frac{1}{2}(y_1 - y_4) ; \frac{\partial Y}{\partial \eta}(-1, \eta) = \frac{1}{2}(y_2 - y_3) \end{cases}$$

$$(1-69) \quad \begin{cases} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta}(1, \eta) = \left[\frac{\partial P_0(1)}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial P_1(1)}{\partial \xi} + \eta^2 \frac{\partial P_2(1)}{\partial \xi} + \eta^3 \frac{\partial P_3(1)}{\partial \xi} \right] \frac{1}{2}(y_1 - y_4) \\ \frac{\partial \hat{W}}{\partial \eta} \frac{\partial Y}{\partial \xi}(-1, \eta) = [P_1(1) + 2\eta P_2(1) + 3\eta^2 P_3(1)](\beta + \delta\eta) \end{cases}$$

(1-66) donne

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial x}(1, \eta) = \frac{1}{J_K(1, \eta)} \left[\frac{\partial \hat{W}}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta} - \frac{\partial \hat{W}}{\partial \eta} \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right](1, \eta).$$

A partir de (1-69) nous pouvons écrire

$$\frac{\partial \hat{W}}{\partial x}(1, \eta) = \frac{1}{J_K(1, \eta)} Q(\eta) \text{ où } Q(\eta) \text{ est un polynôme de degré 3}$$

en une variable, ce qui donne que

$$(1-70) \quad \begin{aligned} \hat{z}_h(1, \eta) &= \left(\frac{\partial \hat{W}}{\partial x} - \hat{\pi} \frac{\partial \hat{W}}{\partial x} \right)(1, \eta) \\ &= \frac{1}{J_K(1, \eta)} Q(\eta) - \frac{1}{2}(\hat{x} + \hat{x}_4) - \frac{\eta}{2}(\hat{x}_1 - \hat{x}_4). \end{aligned}$$

Un calcul similaire comme (1-70) donne

$$(1-71) \quad \hat{z}_h(-1, \eta) = \frac{1}{J_K(-1, \eta)} R(\eta) - \frac{1}{2}(\hat{x}_2 + \hat{x}_3) - \frac{\eta}{2}(\hat{x}_2 - \hat{x}_3)$$

où $R(\eta)$ est un polynôme de degré 3 en une variable.

En comparant les expressions (1-70) et (1-71) nous remarquons que l'expression

$$\hat{z}_h(1, \eta) \frac{y_1 - y_4}{2} - \hat{z}_h(-1, \eta) \frac{y_2 - y_3}{2} \text{ est en général différente}$$

de zéro, mais est petite dans un sens à préciser plus loin si l'hypothèse (1-37) est satisfaite. Ce qui répond au lemme (1-4).

Remarque (1-4) :

Quel est l'intérêt de choisir une méthode d'éléments finis non conformes ? L'utilisation des méthodes d'éléments finis conformes, pour approximer les problèmes elliptiques du quatrième ordre, pour laquelle la solution discrète est polynomiale sur chaque triangle ou quadrilatère, nécessite le choix d'éléments finis de haut degré, (cf. Zěnisek [26]). Cela conduit à des difficultés mathématiques (recherches des fonctions formes) et numériques (coûteux) augmentant très rapidement de façon disproportionnée.

Il est cependant relativement simple d'obtenir des fonctions de base qui, tout en garantissant la continuité des fonctions $v_h \in V_h$, peuvent violer la continuité des dérivées de passage d'un élément à l'autre, excepté aux noeuds où la continuité est imposée, ie $V_h \subset C^0(\bar{\Omega})$ et $V_h \not\subset H_0^2(\Omega)$.

Ceci, en quelque sorte, s'approche de la réalité physique du problème, (cf. Zienkiewicz [28]) : sous l'effet de l'effort f la plaque subit un déplacement latéral u , si on impose que $V_h \subset C^1(\bar{\Omega})$ ie $V_h \subset H_0^2(\Omega)$ (méthode conforme), cela veut dire que la plaque reste continue et ne fait pas de plis. Mais, en réalité, sous l'action de tels champs de force, des plis apparaissent, donc, il y a des discontinuités des dérivées.

- CHAPITRE 2 -

ESTIMATION DU TERME DE CONSISTANCE

=====

$$R_h(u, w_h) = (f, w_h) - a_h(u, w_h)$$

=====

POUR TOUT $u \in H^3(\Omega)$ ET POUR TOUT $w_h \in V_h$

=====

On rappelle que V_h est l'espace non conforme construit au Chapitre 1 i. e. est l'espace des fonctions v_h satisfaisant :

$$(2-1) \quad \begin{cases} v_h \in H_0^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), v_h|_K \in H^2(K) \text{ pour tout } K \in (\tau_h)_h. \\ \partial_\nu v_h(b) = 0 \text{ pour tout noeud frontière } b. \end{cases}$$

Nous faisons les hypothèses suivantes :

H_1) : La triangulation $(\tau_h)_h$ en quadrilatère convexe K est supposée régulière.

H_2) : On suppose que zh^{-2} est petit devant 1, où $z = \max_K z_K$.

1 - RESULTATS

Lemme (2-1) :

On suppose les hypothèses (H_1) , (H_2) vérifiées. Il existe alors une constante c indépendante de h telle que :

$$(2-2) \quad \|w_h\|_{1,\Omega} \leq c \|w_h\|_h \text{ pour tout } w_h \in V_h.$$

Au premier stade, nous allons estimer $b_h(\varphi, w_h)$

$$|b_h(\varphi, w_h)| \leq \sum_{K \in \tau_h} \int_K |\Delta \varphi| |\Delta w_h| dx dy.$$

L'inégalité de Cauchy - Schwarz donne :

$$\begin{aligned} \int_K |\Delta \varphi| |\Delta w_h| dx dy &\leq \left(\int_K |\Delta \varphi|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_K |\Delta w_h|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\Delta \varphi|_{0,K} |\Delta w_h|_{0,K} \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$|b_h(\varphi, w_h)| \leq \sum_{K \in \tau_h} |\Delta \varphi|_{0,K} |\Delta w_h|_{0,K}.$$

Si on pose $|\Delta \varphi|_{0,K} = \lambda_K$, $|\Delta w_h|_{0,K} = \mu_K$, et en utilisant l'inégalité suivante

$$(2-8) \quad \sum_{K \in \tau_h} \lambda_K \mu_K \leq \left(\sum_{K \in \tau_h} \lambda_K^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{K \in \tau_h} \mu_K^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

nous aurons :

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \tau_h} |\Delta \varphi|_{0,K} |\Delta w_h|_{0,K} &\leq \left(\sum_{K \in \tau_h} \int_K |\Delta \varphi|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(\sum_{K \in \tau_h} \int_K |\Delta w_h|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{or } \left(\sum_{K \in \tau_h} \int_K |\Delta w_h|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{K \in \tau_h} |\Delta w_h|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \left(\sum_{K \in \tau_h} |w_h|_{2,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = c \|w_h\|_h. \end{aligned}$$

On déduit donc

$$\sum_{K \in \tau_h} |\Delta \varphi|_{0,K} |\Delta w_h|_{0,K} \leq c \|\varphi\|_{2,\Omega} \|w_h\|_h.$$

En remarquant que (d'après (2-5))

$$(2-9) \quad \|\varphi\|_{2,\Omega} \leq c_1 \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

il résulte alors que

$$(2-10) \quad |b_h(\varphi, w_h)| \leq c_2 \|g\|_{H^{-1}(\Omega)} \|w_h\|.$$

Au deuxième stade, nous allons estimer :

$$E_h(\varphi, w_h) = \sum_{K \in \tau_h} \int_{\partial K} \Delta \varphi \, \partial_\nu w_h \, dx \, dy$$

• Estimation de $E_h(\varphi, w_h)$:

Nous reprenons les mêmes notations qu'au chapitre 1

$$(2-11) \quad E_h(\varphi, w_h) = \sum_{K \in \tau_h} E_K(\varphi, w_h) = \sum_{K \in \tau_h} E_{K,x}(\varphi, w_h) + \sum_{K \in \tau_h} E_{K,y}(\varphi, w_h)$$

$$(2-12) \quad E_K(\varphi, w_h) = \Delta_{x,K}(\varphi, w_h) + \Delta_{y,K}(\varphi, w_h) \text{ pour tout } \varphi \in H^3(K) \text{ et } w_h \in P_K$$

$$(2-13) \quad \text{où} \begin{cases} \Delta_{x,K}(\varphi, w_h) = \int_{\partial K} \Delta \varphi \left(\frac{\partial w_h}{\partial x} - \pi \frac{\partial w_h}{\partial x} \right) \eta_x \, d\gamma \\ \Delta_{y,K}(\varphi, w_h) = \int_{\partial K} \Delta \varphi \left(\frac{\partial w_h}{\partial x} - \pi \frac{\partial w_h}{\partial x} \right) \eta_y \, d\gamma \end{cases}$$

pour majorer $E_h(\varphi, w_h)$, il suffit de majorer $\Delta_{x,K}(\cdot, \cdot)$.

La contribution des côtés A_1A_4 et A_2A_3 du quadrilatère convexe K à $\Delta_{x,K}(\cdot, \cdot)$ est

$$(2-14) \quad \begin{aligned} \Delta_{x,K}(\varphi, w_h) &= \int_{A_4}^{A_1} f \left(\frac{\partial w_h}{\partial x} - \pi \frac{\partial w_h}{\partial x} \right) \frac{y_1 - y_4}{A_1A_4} \, d\gamma \\ &\quad - \int_{A_3}^{A_2} f \left(\frac{\partial w_h}{\partial x} - \pi \frac{\partial w_h}{\partial x} \right) \frac{y_2 - y_3}{A_2A_3} \, d\gamma \quad \text{où } f = \Delta \varphi. \end{aligned}$$

Cette expression devient sur le carré de référence

$$\begin{aligned} \Delta_{x,K}^{(1)}(\varphi, w_h) &= \int_{-1}^{+1} \widehat{f} \left(\widehat{\frac{\partial w}{\partial x}} - \pi \widehat{\frac{\partial w}{\partial x}} \right) (1, \eta) \frac{y_1 - y_4}{2} \, d\eta \\ &\quad - \int_{-1}^{+1} \widehat{f} \left(\widehat{\frac{\partial w}{\partial x}} - \pi \widehat{\frac{\partial w}{\partial x}} \right) (-1, \eta) \frac{y_2 - y_3}{2} \, d\eta \end{aligned}$$

$$= X_{K,x} \left(\hat{f}, \frac{\widehat{\partial W}}{\partial x} \right) + Y_{K,x} \left(\hat{f}, \frac{\widehat{\partial W}}{\partial x} \right)$$

où

$$(2-15) \quad X_{K,x} \left(\hat{f}, \frac{\widehat{\partial W}}{\partial x} \right) = - \int_{-1}^{+1} \hat{f} \left(\frac{\widehat{\partial W}}{\partial x} - \pi \frac{\widehat{\partial W}}{\partial x} \right) (1, \eta) \frac{y_1 - y_4}{2} d\eta$$

$$(2-16) \quad Y_{K,x} \left(\hat{f}, \frac{\widehat{\partial W}}{\partial x} \right) = - \int_{-1}^{+1} \hat{f} \left(\frac{\widehat{\partial W}}{\partial x} - \pi \frac{\widehat{\partial W}}{\partial x} \right) (-1, \eta) \frac{y_2 - y_3}{2} d\eta$$

alors, la majoration de (2-14) revient à la majoration de (2-15) ou de (2-16).

. Majoration de $X_{K,x}(\cdot, \cdot)$:

$$\frac{X_{K,x} \left(\hat{f}, \frac{\widehat{\partial W}}{\partial x} \right)}{h_K} = \int_{-1}^{+1} \hat{f} \left(\frac{\widehat{\partial W}}{\partial x} - \pi \frac{\widehat{\partial W}}{\partial x} \right) (1, \eta) \frac{y_1 - y_4}{2h_K} d\eta$$

$$\left| \frac{X_{K,x} \left(\hat{f}, \frac{\widehat{\partial W}}{\partial x} \right)}{h_K} \right| \leq c \|\hat{f}\|_{1, \hat{K}} \left| \frac{\widehat{\partial W}}{\partial x} - \pi \frac{\widehat{\partial W}}{\partial x} \right|_{L^2(-1, +1)}$$

$\hat{f} \in \mathcal{L}(W^{1, q}(\hat{K}), L^2(\partial\hat{K}))$, $q > 2$ et qui laisse invariant P_0 , alors

$$(2-17) \quad \left| \frac{\widehat{\partial W}}{\partial x} - \pi \frac{\widehat{\partial W}}{\partial x} \right|_{L^2(-1, +1)} \leq c \left| \frac{\widehat{\partial W}}{\partial x} \right|_{1, q, \hat{K}} \quad \text{où } c \text{ indépendante de } h.$$

Ce résultat résulte du résultat suivant (P.A. Raviart, cours de DEA Paris VI, 1978).

$$(2-18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } \Omega \in \mathcal{L}(W^{m+1, q}(\Omega), L^2(\partial\Omega)) \text{ laisse invariant } P_m \\ \text{Alors on a } |\pi v - v|_{0, \partial\Omega} \leq c(\Omega, m) |v|_{m+1, q, \Omega} \text{ pour } v \in W^{m+1, q}(\Omega) \end{array} \right.$$

d'où

$$\left| \frac{X_{K,x} \left(\hat{f}, \frac{\widehat{\partial W}}{\partial x} \right)}{h_K} \right| \leq c \|\hat{f}\|_{1, \hat{K}} \left| \frac{\widehat{\partial W}}{\partial x} \right|_{1, q, \hat{K}}.$$

Mais nous savons (chapitre 1) expression (1-65) que :

$$\frac{\widehat{\partial W}}{\partial x}(\xi, \eta) = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial \hat{W}}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \hat{W}}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) (\xi, \eta).$$

. Calculons $\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial x} (\xi, \eta) \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{J} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) (\xi, \eta) \right)$.

On pose $J_{F_K} (\xi, \eta) = J$.

$$(2-19) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \right) = - \frac{J^I}{J^2} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \eta^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \right)$$

car $\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0$.

La triangulation est supposée régulière, donc nous aurons (Ciarlet - Raviart [9])

$$(2-20) \quad \begin{cases} J_{F_K} (\xi, \eta) \geq \hat{c}_1 h_K^2 \\ b, c, \beta, \gamma \leq \hat{c}_2 h_K \\ \delta, d \leq \hat{c}_3 z_K \end{cases}$$

où $b, c, \beta, \gamma, \delta, d$ et J_{F_K} sont donnés par (1-57), (1-58) et (1-59).

D'après l'expression (1-59), nous avons encore :

$$J_{\xi}^I = (b\delta - d\beta), \quad J_{\eta}^I = (d\gamma - c\delta).$$

On déduit que :

$$(2-21) \quad |DJ|_{0, \infty, \hat{K}} = \max (|b\delta - d\beta|, |d\gamma - c\delta|) \leq \hat{c}_4 z_K h_K$$

$$(2-22) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} = \delta \leq \hat{c}_3 z_K, \quad |\partial y| \leq ch_K \quad \text{où } \partial y \text{ denote soit } \frac{\partial y}{\partial \eta} \text{ soit } \frac{\partial y}{\partial \xi}.$$

Nous aurons alors :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial x} (\xi, \eta) \right) \right|_{L^q(\hat{K})} &\leq \max \left| \frac{J_{\eta}^I}{J^2} \partial y \right| |\hat{w}|_{1, q, \hat{K}} + \max \left| \frac{\partial y}{J} \right| |\hat{w}|_{2, \hat{K}} \\ &\quad + \max \left| \frac{\delta}{J} \right| |\hat{w}|_{1, q, \hat{K}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \hat{C} \left(z_K h_K^{-2} |\hat{w}|_{1,q,\hat{K}} + h_K^{-1} |\hat{w}|_{2,q,\hat{K}} + z_K h_K^{-2} |\hat{w}|_{1,q,\hat{K}} \right) \\ &\leq \hat{C} \left(z_K h_K^{-2} |\hat{w}|_{1,q,\hat{K}} + h_K^{-1} |\hat{w}|_{2,q,\hat{K}} \right). \end{aligned}$$

Du fait que $\hat{w} \in \hat{P}_K$, espace de dimension fini, nous aurons :

$$|\hat{w}|_{1,q,\hat{K}} \leq \hat{c} |\hat{w}|_{1,\hat{K}} ; \quad |\hat{w}|_{2,q,\hat{K}} \leq \hat{c} |\hat{w}|_{2,\hat{K}}$$

i. e. toutes les normes sont équivalentes, ce qui implique :

$$(2-23) \quad \left| \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\widehat{\frac{\partial w}{\partial x}}(\xi, \eta) \right) \right|_{L^q(\hat{K})} \leq c \left(z_K h_K^{-2} |\hat{w}|_{1,\hat{K}} + h_K^{-1} |\hat{w}|_{2,\hat{K}} \right).$$

Nous avons le lemme (0-9)

$$(2-24) \quad |\hat{w}|_{1,\hat{K}} \leq c (\text{Inf } J)^{-\frac{1}{2}} h_K |w|_{1,K} \leq c |w|_{1,K}$$

$$(2-25) \quad |\hat{w}|_{2,\hat{K}} \leq c (\text{Inf } J)^{-\frac{1}{2}} \left(z_K |w|_{1,K} + h_K^2 |w|_{2,K} \right).$$

Nous combinons (2-23), (2-24) et (2-25), nous aurons :

$$(2-26) \quad \left| \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\widehat{\frac{\partial w}{\partial x}}(\xi, \eta) \right) \right|_{L^q(\hat{K})} \leq c \left(z_K h_K^{-2} |w|_{1,K} + |w|_{2,K} \right).$$

De la même manière, nous aurons :

$$(2-27) \quad \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\widehat{\frac{\partial w}{\partial x}}(\xi, \eta) \right) \right|_{L^q(\hat{K})} \leq c \left(z_K h_K^{-2} |w|_{1,K} + |w|_{2,K} \right).$$

Les expressions (2-26) et (2-27) donnent alors :

$$\left| \widehat{\frac{\partial w}{\partial x}} \right|_{1,q,\hat{K}} \leq c \left(z_K h_K^{-2} |w|_{1,K} + |w|_{2,K} \right) \text{ pour tout } w \in P_K$$

donc

$$\begin{aligned} \left| \frac{x_{K,x}(\hat{f}, \hat{w})}{h_K} \right| &\leq c \|\hat{f}\|_{1,\hat{K}} \left(z_K h_K^{-2} |w|_{1,K} + |w|_{2,K} \right) \\ &\leq c (\text{Inf } J)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{1,K} \left(z_K h_K^{-2} |w|_{1,K} + |w|_{2,K} \right). \end{aligned}$$

Du fait que $\|\hat{f}\|_{1,\hat{K}} \leq c (\text{Inf } J)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{1,K}$

on déduit alors :

$$(2-28) \quad |X_{K,x}(\hat{f}, \hat{w})| \leq c \|f\|_{1,K} (z_K h_K^{-2} |w|_{1,K} + |w|_{2,K})$$

$$\text{et } |\Delta_{K,x}^{(1)}(\varphi, w)| \leq c \|\varphi\|_{3,K} (z_K h_K^{-2} |w|_{1,K} + |w|_{2,K}).$$

En sommant sur tous les quadrilatères du maillage, on conclut que :

$$|E_h(\varphi, w_h)| \leq c \|\varphi\|_{3,\Omega} (z h^{-2} |w_h|_{1,\Omega} + \|w_h\|_h).$$

Du fait que $\|\varphi\|_{3,\Omega} \leq c \|g\|_{H^{-1}(\Omega)}$

$$(2-29) \quad |E_h(\varphi, w_h)| \leq c \|g\|_{H^{-1}(\Omega)} (z h^{-2} |w_h|_{1,\Omega} + \|w_h\|_h).$$

Les majorations (2-10) et (2-29) impliquent :

$$|(w_h, g)| \leq c \|g\|_{H^{-1}(\Omega)} (z h^{-2} |w_h|_{1,\Omega} + \|w_h\|_h)$$

$$\frac{|(w_h, g)|}{\|g\|_{H^{-1}(\Omega)}} \leq c (z h^{-2} |w_h|_{1,\Omega} + \|w_h\|_h) \quad \text{pour tout } g \in H^{-1}(\Omega)$$

d'où

$$\|w_h\|_{1,\Omega} \leq c (z h^{-2} |w_h|_{1,\Omega} + \|w_h\|_h).$$

Si $z h^{-2}$ est petit devant 1, on déduit alors :

$$\|w_h\|_{1,\Omega} \leq c \|w_h\|_h$$

C. Q. F. D.

Lemme (2-2) :

On suppose les hypothèses (H_1) et (H_2) vérifiées ; il existe une constante $c > 0$ indépendante de h telle que :

$$|w_h|_{0,\Omega} \leq c \|w_h\|_h \quad \text{pour tout } w_h \in V_h.$$

Démonstration :

$$(2-30) \quad |w_h|_{0,\Omega} = |w_h|_{L^2(\Omega)} = \sup_{\substack{g \in L^2(\Omega) \\ g \neq 0}} \frac{|(w_h, g)|}{|g|_{L^2(\Omega)}}.$$

Soit alors φ la solution du problème biharmonique suivant :

$$\begin{cases} \Delta^2 \varphi = g & \text{dans } \Omega \\ \varphi|_{\Gamma} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\Gamma} = 0. \end{cases}$$

Comme dans le lemme (2-1), $\varphi \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, en utilisant la formule de Green (1-9) on a :

$$\begin{aligned} (w_h, g) &= (w_h, \Delta^2 \varphi) \\ &= \int_{\Omega} \Delta \varphi \Delta w_h \, dx \, dy - \int_{\Gamma} (\partial_{\nu} \Delta \varphi) \cdot w_h \, d\gamma + \int_{\Gamma} \Delta \varphi \partial_{\nu} w_h \, d\gamma. \end{aligned}$$

Encore du fait que $V_h \subset H_0^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, $w_h|_{\Gamma} = 0$, nous aurons alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\Delta^2 \varphi) w_h \, dx \, dy &= \sum_{K \in \tau_h} \int_K \Delta \varphi \cdot \Delta w_h \, dx \, dy + \sum_{K \in \tau_h} \int_{\partial K} \Delta \varphi \partial_{\nu} w_h \, d\gamma \\ &= b_h(\varphi, w_h) + E_h(\varphi, w_h). \end{aligned}$$

Nous remarquons que nous tombons sur les mêmes expressions que le lemme (2-1). Les majorations seront identiques et comme

$|w|_{0,\Omega} \leq \|w_h\|_{1,\Omega}$ il résulte que

$$|w|_{0,\Omega} \leq c \|w_h\|_h.$$

C. Q. F. D.

2 - DECOMPOSITION DE $R_h(u, w_h) = (f, w_h) - a_h(u, w_h)$

Nous rappelons que :

$$R_h(u, w_h) = \sum_{K \in \tau_h} \int_K \left((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u \right) \frac{\partial w_h}{\partial n} \, d\gamma.$$

Nous reprendrons les mêmes notations qu'au chapitre 1.

$$\begin{aligned} R_h(u, w_h) &= \sum_{K \in \tau_h} E_K(u, w_h) \\ &= \sum_{K \in \tau_h} E_{K,x}(u, w_h) + \sum_{K \in \tau_h} E_{K,y}(u, w_h) \end{aligned}$$

$$(2-31) \quad E_K(u, w_h) = \Delta_{x,K}(u, w_h) + \Delta_{y,K}(u, w_h) \text{ pour tout } u \in H^3(K) \text{ et } w_h \in P_K$$

$$\text{où } \Delta_{x,K}(u, w_h) = \int_{\partial K} \left((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u \right) \left(\frac{\partial w_h}{\partial x} - \pi \frac{\partial w_h}{\partial x} \right) \eta_x \, d\gamma$$

$$\Delta_{y,K}(u, w_h) = \int_{\partial K} \left((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u \right) \left(\frac{\partial w_h}{\partial y} - \pi \frac{\partial w_h}{\partial y} \right) \eta_y \, d\gamma.$$

L'estimation de l'expression $R_h(u, w_h)$ revient à estimer chaque terme de l'expression (2-31).

La contribution des côtés $A_1 A_4$ et $A_2 A_3$ du quadrilatère convexe K à $\Delta_{x,K}(u, w_h)$ est :

$$\begin{aligned} \Delta_{x,K}^{(1)}(u, w_h) &= \int_{A_4}^{A_1} g \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \pi \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{y_1 - y_4}{A_1 A_4} \, d\gamma \\ &\quad - \int_{A_3}^{A_1} g \left(\frac{\partial w_h}{\partial x} - \pi \frac{\partial w_h}{\partial x} \right) \frac{y_2 - y_3}{A_2 A_3} \, d\gamma \end{aligned}$$

Sur le carré de référence $\Delta_{x,K}^{(1)}(\cdot, \cdot)$ est donnée par (1-54)

$$(2-32) \quad \Delta_{x,K}^{(1)}(u, w_h) = \int_{-1}^{+1} \left[\hat{g}(1, \eta) \hat{z}_h(1, \eta) \frac{y_1 - y_4}{2} - \hat{g}(-1, \eta) \hat{z}_h(-1, \eta) \frac{y_2 - y_3}{2} \right] d\eta$$

$$\text{où } \hat{z}_h(\xi, \eta) = \widehat{\frac{\partial w}{\partial x}} - \hat{\pi} \widehat{\frac{\partial w}{\partial x}}.$$

La contribution des côtés $A_1 A_2$ et $A_4 A_3$ du quadrilatère convexe K à $\Delta_{x,K}(\cdot, \cdot)$, en passant sur le carré de référence, est :

$$(2-33) \quad \Delta_{x,K}^{(2)}(u, w_h) = \int_{-1}^{+1} \left[\hat{g}(\xi, 1) \hat{z}_h(\xi, 1) \frac{y_1 - y_2}{2} - \hat{g}(\xi, -1) \hat{z}_h(\xi, -1) \frac{y_4 - y_3}{2} \right] d\eta.$$

A son tour, pour estimer $\Delta_{x,K}^{(1)}(\cdot, \cdot)$, il suffit d'estimer soit (2-32) soit (2-33).

- ESTIMATION DE $\Delta_{x,K}^{(1)}(\cdot, \cdot)$

D'après l'expression (1-68) on a :

$$\frac{\partial y}{\partial \eta}(1, \eta) = \frac{y_1 - y_4}{2} ; \quad \frac{\partial y}{\partial \eta}(-1, \eta) = \frac{y_2 - y_3}{2} \quad \text{ce qui donne :}$$

$$(2-34) \quad \Delta_{x,K}^{(1)}(u, w_h) = \int_{-1}^1 [\hat{g}(1, \eta) \hat{z}_h(1, \eta) \frac{\partial y}{\partial \eta}(1, \eta) - \hat{g}(-1, \eta) \hat{z}_h(-1, \eta) \frac{\partial y}{\partial \eta}(-1, \eta)] d\eta.$$

D'après le chapitre 1, nous avons :

$$\hat{z}_h(1, \eta) = \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial x} - \hat{\pi} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \right)(1, \eta)$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} = \frac{1}{J(\xi, \eta)} \left[\frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right]$$

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial x}(1, \eta) = \frac{1}{J(1, \eta)} \left[\frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}(1, \eta) - \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}(1, \eta) \right].$$

Si on note l'opérateur d'interpolation $\hat{\pi}$ par $\sim$, nous aurons alors :

$$\begin{aligned} \hat{z}_h(1, \eta) &= \frac{1}{J(1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}(1, \eta) - \frac{1}{J(1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}(1, \eta) \\ &\quad - \left(\frac{1}{J(1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}(1, \eta) - \frac{1}{J(1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}(1, \eta) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \hat{z}_h(-1, \eta) &= \frac{1}{J(-1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}(-1, \eta) - \frac{1}{J(-1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}(-1, \eta) \\ &\quad - \left(\frac{1}{J(-1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}(-1, \eta) - \frac{1}{J(-1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}(-1, \eta) \right). \end{aligned}$$

Soit $\hat{\pi}_0$ l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\hat{K})$ sur le sous-espace $\hat{P}_1(\hat{K})$. Alors

$$\begin{aligned} &\hat{g}(1, \eta) \hat{z}_h(1, \eta) \frac{\partial y}{\partial \eta}(1, \eta) - \hat{g}(-1, \eta) \hat{z}_h(-1, \eta) \frac{\partial y}{\partial \eta}(-1, \eta) \\ &= \left(\hat{g}(1, \eta) - \hat{\pi}_0 \hat{g}(0, 0) \right) \hat{z}_h(1, \eta) \frac{\partial y}{\partial \eta}(1, \eta) + \hat{\pi}_0 \hat{g}(0, 0) \hat{z}_h(1, \eta) \frac{\partial y}{\partial \eta}(1, \eta) \\ &\quad - \left(\hat{g}(-1, \eta) - \hat{\pi}_0 \hat{g}(0, 0) \right) \hat{z}_h(-1, \eta) \frac{\partial y}{\partial \eta}(-1, \eta) - \hat{\pi}_0 \hat{g}(0, 0) \hat{z}_h(-1, \eta) \frac{\partial y}{\partial \eta}(-1, \eta). \end{aligned}$$

Nous notons :

$$(2-35) \quad R_1(\hat{g}, \hat{w}) = \int_{-1}^{+1} (\hat{g}(1, \eta) - \hat{\pi}_0 \hat{g}(0, 0)) \frac{\partial Y}{\partial \eta}(1, \eta) \left(\frac{1}{J(1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta}(1, \eta) - \frac{1}{J(1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta}(1, \eta) \right)$$

$$(2-36) \quad R_2(\hat{g}, \hat{w}) = \int_{-1}^{+1} (\hat{g}(1, \eta) - \hat{\pi}_0 \hat{g}(0, 0)) \frac{\partial Y}{\partial \eta}(1, \eta) \left(\frac{1}{J(1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta} \frac{\partial Y}{\partial \xi}(1, \eta) - \frac{1}{J(1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta} \frac{\partial Y}{\partial \xi}(1, \eta) \right)$$

$$(2-37) \quad R_3(\hat{g}, \hat{w}) = \int_{-1}^{+1} (\hat{g}(-1, \eta) - \hat{\pi}_0 \hat{g}(0, 0)) \frac{\partial Y}{\partial \eta}(-1, \eta) \left(\frac{1}{J(-1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta}(-1, \eta) - \frac{1}{J(-1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta}(-1, \eta) \right)$$

$$(2-38) \quad R_4(\hat{g}, \hat{w}) = \int_{-1}^{+1} (\hat{g}(-1, \eta) - \hat{\pi}_0 \hat{g}(0, 0)) \frac{\partial Y}{\partial \eta}(-1, \eta) \left(\frac{1}{J(-1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta} \frac{\partial Y}{\partial \xi}(-1, \eta) - \frac{1}{J(-1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta} \frac{\partial Y}{\partial \xi}(-1, \eta) \right)$$

$$(2-39) \quad R_5(\dots) = \int_{-1}^{+1} \hat{\pi}_0 \hat{g}(0, 0) \frac{\partial Y}{\partial \eta}(1, \eta) \left(\frac{1}{J(1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta}(1, \eta) - \frac{1}{J(1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta}(1, \eta) \right) \\ - \hat{\pi}_0 \hat{g}(0, 0) \frac{\partial Y}{\partial \eta}(-1, \eta) \left(\frac{1}{J(-1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta}(-1, \eta) - \frac{1}{J(-1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta}(-1, \eta) \right)$$

$$(2-40) \quad R_6(\dots) = \int_{-1}^{+1} \hat{\pi}_0 \hat{g}(0, 0) \frac{\partial Y}{\partial \eta}(1, \eta) \left(\frac{1}{J(1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta} \frac{\partial Y}{\partial \xi}(1, \eta) - \frac{1}{J(1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta} \frac{\partial Y}{\partial \xi}(1, \eta) \right) \\ - \hat{\pi}_0 \hat{g}(0, 0) \frac{\partial Y}{\partial \eta}(-1, \eta) \left(\frac{1}{J(-1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta} \frac{\partial Y}{\partial \xi}(-1, \eta) - \frac{1}{J(-1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta} \frac{\partial Y}{\partial \xi}(-1, \eta) \right).$$

Nous pouvons remarquer que pour estimer (2-34) il suffit de majorer les formes bilinéaires (2-35), (2-38) et (2-39).

Lemme (2-3) :

Soit la forme bilinéaire (2-35) ; alors il existe une constante $c > 0$ indépendante de h telle que :

$$(2-40) \quad |R_1(\hat{g}, \hat{w})| \leq c h_K |g|_{1,K} (z_K h_K^{-2} |w|_{1,K} + |w|_{2,K}) \text{ pour tout } w \in P_K.$$

Démonstration :

D'après l'inégalité de Cauchy - Schwarz et en remarquant que :

$$\frac{1}{J(1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta}(1, \eta) = \frac{\partial Y}{\partial \eta}(1, \eta) \frac{1}{J(1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi}(1, \eta)$$

$$|R_1(\hat{g}, \hat{w})| \leq \left| \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} \right)^2 \right| |\hat{g}(1, \eta) - \hat{\pi}_0 \hat{g}(0, 0)|_{0, \widehat{\delta K}} \left| \frac{1}{J(1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} - \frac{1}{J(1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \right|_{0, \widehat{\delta K}}$$

D'après les résultats (2-18) et (2-20), il résulte que :

$$|R_1(\hat{g}, \hat{w})| \leq c h_K^2 |\hat{g}|_{1, \hat{K}} \left| \frac{1}{J(1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \right|_{1, q, \hat{K}}.$$

La formule de Leibniz donne :

$$\begin{aligned} |R_1(\hat{g}, \hat{w})| &\leq c h_K^2 |\hat{g}|_{1, \hat{K}} \left(\left| \frac{1}{J(1, \eta)} \right|_{1, \infty, \hat{K}} \left| \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \right|_{0, q, \hat{K}} + \left| \frac{1}{J(1, \eta)} \right|_{0, \infty, \hat{K}} \left| \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \right|_{1, q, \hat{K}} \right) \\ &\leq c h_K^2 |\hat{g}|_{1, \hat{K}} (z_K h_K^{-3} |\hat{w}|_{1, q, \hat{K}} + h_K^{-2} |\hat{w}|_{2, q, \hat{K}}) \\ &\leq c h_K^2 |\hat{g}|_{1, \hat{K}} (E_K h_K^{-3} |\hat{w}|_{1, \hat{K}} + h_K^{-2} |\hat{w}|_{2, \hat{K}}) \end{aligned}$$

du fait que $\hat{w} \in \hat{P}_K$ espace de dimension fini.

Nous avons chapitre 0 :

$$(2-41) \quad |\hat{w}|_{1, \hat{K}} \leq c (\inf J)^{-\frac{1}{2}} h_K |w|_{1, K}$$

$$(2-42) \quad |w|_{2, \hat{K}} \leq c (\inf J)^{-\frac{1}{2}} (z_K |w|_{1, K} + h_K^2 |w|_{2, K})$$

$$(2-43) \quad |\hat{g}|_{1, \hat{K}} \leq c (\inf J)^{-\frac{1}{2}} h_K |g|_{1, K}$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} |R_1(\hat{g}, \hat{w})| &\leq c h_K^2 (\inf J)^{-1} h_K |g|_{1, K} (z_K h_K^{-2} |w|_{1, K} + |w|_{2, K}) \\ &\leq c h_K |g|_{1, K} (z_K h_K^{-2} |w|_{2, K} + |w|_{2, K}). \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Lemme (2-4) :

Soit la forme bilinéaire (2-38), alors il existe une constante $c > 0$ indépendante de h telle que :

$$(2-44) \quad |R_4(\hat{g}, \hat{w})| \leq c h |g|_{1, K} (z h^{-2} |w|_{1, K} + |w|_{2, K}).$$

Démonstration :

D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$|R_4(\hat{g}, \hat{w})| \leq \left| \frac{\partial y}{\partial \eta} \right| \left| \hat{g}(-1, \eta) - \hat{\pi}_0 \hat{g}(0, 0) \right|_{0, \widehat{\partial K}} \left| \frac{1}{J(-1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}(-1, \eta) - \frac{1}{J(-1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}(-1, \eta) \right|_{0, \widehat{\partial K}}$$

Toujours d'après le résultat (2-18), (2-20) :

$$\begin{aligned} |R_4(\hat{g}, \hat{w})| &\leq ch_K |\hat{g}|_{1, \hat{K}} \left(\left| \frac{1}{J(-1, \eta)} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right|_{1, \infty, \hat{K}} \left| \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta} \right|_{0, q, \hat{K}} + \left| \frac{1}{J(-1, \eta)} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right|_{0, \infty, \hat{K}} \left| \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta} \right|_{1, q, \hat{K}} \right) \\ &\leq ch_K |\hat{g}|_{1, \hat{K}} (z_K h_K^{-2} |\hat{w}|_{1, q, \hat{K}} + h_K^{-1} |\hat{w}|_{2, q, \hat{K}}) \\ &\leq ch_K |\hat{g}|_{1, \hat{K}} (z_K h_K^{-2} |\hat{w}|_{1, \hat{K}} + h_K^{-1} |\hat{w}|_{2, K}), \text{ (car } \hat{w} \in \hat{P}_K). \end{aligned}$$

Les expressions (2-41), (2-42) et (2-43) impliquent :

$$\begin{aligned} |R_4(\hat{g}, \hat{w})| &\leq ch_K (\inf J)^{-1} h_K |g|_{1, K} (z_K h_K^{-1} |w|_{1, K} + h_K |w|_{2, K}) \\ &\leq ch_K |g|_{1, K} (z_K h_K^{-2} |w|_{1, K} + |w|_{2, K}). \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Lemme (3-5) :

L'application $\hat{\phi} \in W^{1, \infty}(\hat{K}) \rightarrow R_5(\hat{\phi}, \hat{\psi}) \in \mathbb{R}$ est continue, de norme inférieure ou égale à $\hat{c} |\hat{\pi}_0 \hat{g}|_{0, \hat{K}} \left| \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \right|_{0, \hat{K}}$. De plus, $\forall \hat{\phi} \in \hat{P}_0 \quad R_5(\hat{\phi}, \hat{\psi}) \equiv 0$ pour tout $\hat{\psi} \in \hat{P}_K$ et il existe une constante $c > 0$ indépendante de h telle que :

$$(2-45) \quad |R_5(\hat{\phi}, \hat{\psi})| \leq c z_K h_K^{-2} |g|_{0, K} |w|_{1, K} \quad \text{pour tout } w \in P_K$$

Démonstration :

Pour $\hat{\phi} = \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{1}{J}$, l'inégalité de Cauchy Schwarz et le résultat (2-18) impliquent :

$$\begin{aligned} |R_5(\hat{\phi}, \hat{\psi})| &\leq \hat{c} |\hat{\phi}|_{0, \infty, \hat{K}} |\hat{\pi}_0 \hat{g}|_{0, \hat{K}} \left| \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \right|_{0, \hat{K}} \quad (\text{car } \hat{w} \in \hat{P}_K) \\ &\leq \hat{c} \|\hat{\phi}\|_{1, \infty, \hat{K}} |\hat{\pi}_0 \hat{g}|_{0, \hat{K}} \left| \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \right|_{0, \hat{K}} \quad (\text{d'où la continuité}) \end{aligned}$$

Ensuite pour $\hat{\phi} = \text{constante}$ $R(\hat{\phi}, \hat{\psi}) \equiv 0$. En effet :

$$R_5(\hat{\phi}, \hat{\psi}) = \int_{-1}^{+1} \hat{\pi}_0 \hat{g}(o, o) \left[\left(\frac{1}{J(1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2(1, \eta) - \frac{1}{J(-1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2(1, \eta) \right) \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{J(-1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2(-1, \eta) - \frac{1}{J(-1, \eta)} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2(-1, \eta) \right) \right].$$

Si $\hat{\phi} = \text{constante} = c$

$$R_5(\hat{\phi}, \hat{\psi}) = c \int_{-1}^{+1} \hat{\pi}_0 \hat{g}(o, o) \left[\left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi}(1, \eta) - \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi}(1, \eta) \right) - \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi}(-1, \eta) - \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi}(-1, \eta) \right) \right].$$

D'après l'expression de (1-66), un calcul simple montre que :

$$(2-46) \quad \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi}(1, \eta) - \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi}(1, \eta) \right) = \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi}(-1, \eta) - \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi}(-1, \eta) \right) = c \left(\frac{\partial^2 P_2}{\partial \xi^2} + \eta \frac{\partial^2 P_3}{\partial \xi^2} \right) (n^2 - 1).$$

Donc il résulte que :

$$R_5(\hat{\phi}, \hat{\psi}) \equiv 0.$$

Le lemme de Bramble-Hilbert (cf. Ciarlet [4], n°8, th. 3) implique :

$$|R_5(\hat{\phi}, \hat{\psi})| \leq c \left| \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{1}{J} \right|_{1, \infty, \hat{K}} |\hat{\pi}_0 \hat{g}|_{o, \hat{K}} \left| \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \right|_{o, \hat{K}}.$$

Comme $\hat{\pi}_0$ est un opérateur de projection en norme $|\cdot|_{o, \hat{K}}$, nous avons : $|\hat{\pi}_0 \hat{g}|_{o, \hat{K}} \leq |\hat{g}|_{o, \hat{K}}$.

D'autre part, d'après (2-18) et (2-20)

$$|R_5(\hat{\phi}, \hat{\psi})| \leq c z_K h_K^{-1} |\hat{g}|_{o, \hat{K}} |\hat{w}|_{1, \hat{K}} \\ \leq c z_K h_K^{-1} (\inf J)^{-1} |g|_{o, K} h_K |w|_{1, K}$$

$$\text{d'où} \quad |R_5(\hat{\phi}, \hat{\psi})| \leq c z_K h_K^{-2} |g|_{o, K} |w|_{1, K}$$

C. Q. F. D.

Lemme (2-6) :

Il existe une constante $c > 0$ indépendante de h telle que :

$$(2-47) \quad |\Delta_{x,K}^{(1)}(u, w)| \leq c(h_K |g|_{1,K} (z_K h_K^{-2} |w|_{1,K} + |w|_{2,K}) + z_K h_K^{-2} |g|_{0,K} |w|_{1,K})$$

pour tout $w \in P_K$.

Preuve :

C'est une déduction immédiate des lemmes (2-3), (2-4) et (2-5).

THEOREME (2-1)

Le domaine Ω est supposé polyédrique ; d'autre part, on suppose les hypothèses (H_1) et (H_2) vérifiées.

Pour tout u solution du problème continu (1-8), il existe une constante $c > 0$ indépendante de h telle que :

$$(2-48) \quad |R_h(u, w_h)| \leq c(h |u|_{3,\Omega} + z h^{-2} |u|_{2,\Omega}) \|w_h\|_h$$

pour tout $w_h \in V_h$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} \text{On avait } R_h &= \sum_{K \in \tau_h} \int_{\partial K} \left((1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u \right) \frac{\partial w_h}{\partial \eta} d\gamma \\ &= \sum_{K \in \tau_h} E_K(u, w_h) \\ &= \sum_{K \in \tau_h} \Delta_{x,K}(u, w_h) + \sum_{K \in \tau_h} \Delta_{y,K}(u, w_h). \end{aligned}$$

D'après le lemme (2-6), il résulte :

$$|\Delta_{x,K}(u, w_h)| \leq c(h_K |g|_{1,K} (z_K h_K^{-2} |w|_{1,K} + |w|_{2,K}) + z_K h_K^{-2} |g|_{0,K} |w|_{1,K})$$

ce qui permet de majorer $E_{K,x}(u, w_h)$.

En sommant sur tous les quadrilatères du maillage, nous aurons :

$$|R_h(u, w_h)| \leq c(h |g|_{1,\Omega} (z h^{-2} |w|_{1,\Omega} + \|w_h\|_h) + z h^{-2} |g|_{0,\Omega} |w|_{1,\Omega}).$$

Pour $z h^{-2}$ petit, on avait montré dans le lemme (2-1) que :

$$|w|_{1,\Omega} \leq c \|w_h\|_h$$

ce qui implique :

$$(2-49) \quad |R_h(u, w_h)| \leq c \left(h |g|_{1,\Omega} (z h^{-2} \|w_h\| + \|w_h\|_h) + z h^{-2} |g|_{0,\Omega} \|w_h\|_h \right).$$

$z h^{-2}$ est petit devant 1, donc il résulte :

$$\begin{aligned} |R_h(u, w_h)| &\leq c \left(h |g|_{1,\Omega} \|w_h\| + z h^{-2} |g|_{0,\Omega} \|w_h\|_h \right) \\ &\leq c \left(h |g|_{1,\Omega} + z h^{-2} |g|_{0,\Omega} \right) \|w_h\| \end{aligned}$$

et comme $g = (1-\sigma) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \Delta u$

$$|g|_{0,\Omega} \leq |u|_{2,\Omega}, \quad |g|_{1,\Omega} \leq |u|_{3,\Omega}$$

d'où

$$(2-50) \quad |R_h(u, w_h)| \leq c \left(h |u|_{3,\Omega} + z h^{-2} |u|_{2,\Omega} \right) \|w_h\|_h$$

pour tout $w_h \in V_h$.

Remarque (2-1) :

Dans le cas du maillage droit, i. e. pour $z = 0$, on retrouve bien le résultat donné par le Patch Test.

- CHAPITRE 3 -

L'EFFET DE L'INTEGRATION NUMERIQUE

=====

SUR LA MAJORATION D'ERREUR

=====

DANS LE CAS DU MAILLAGE EN QUADRILATERES CONVEXES

=====

- INTRODUCTION

L'approximation des problèmes elliptiques du quatrième ordre, en particulier le problème de plaques, et la résolution numérique du problème discret correspondant par la méthode non conforme utilisant l'élément fini d'Adini déformé, pour laquelle la solution discrète n'est même pas polynômiale sur chaque quadrilatère K du maillage, nécessite le calcul d'intégrales sur chaque maille quadrilatérale. Il est coûteux ou tout simplement impossible de calculer exactement ces intégrales. C'est pourquoi on est amené à utiliser des formules de quadrature approchées.

L'objet de ce chapitre est de donner un théorème de majoration d'erreur en intégration numérique et de montrer qu'un choix convenable de formules de quadrature permet d'obtenir une estimation asymptotique des termes de consistance qui apparaissent dans le théorème de majoration d'erreur, de même ordre que celle obtenue dans le cas de l'intégration exacte. Pour cela, nous utilisons des méthodes exposées dans Ciarlet-Raviart [9, 10] et Ciarlet [4, 5, 6]. Pour certaines variantes de ces méthodes, on peut aussi consulter Zlamal [27].

2 - POSITION DU PROBLEME

Le problème continu a été défini au chapitre 1 par l'expression (1-8).

Nous rappelons la définition de l'espace de dimension finie V_h (voir chapitre 1, expression (1-24))

$$(3-1) \quad V_h \not\subset H_0^2(\Omega), \text{ mais on a l'inclusion } V_h \subset C^0(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega).$$

- Le problème abstrait est le suivant :

$$(3-2) \quad \begin{cases} \text{trouver } u_h \in V_h \text{ telle que :} \\ \tilde{a}_h(u_h, v_h) = (f, v_h)_h \text{ pour tout } v_h \in V_h \end{cases}$$

où la forme bilinéaire $\tilde{a}_h(.,.)$ et la forme linéaire $(f, .)_h$ sont respectivement données par :

$$(3-3) \quad \tilde{a}(u_h, v_h) = \sum_{K \in \tau_h} \sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell, K} [\Delta u_h \Delta v_h + (1-\sigma) \left(2 \frac{\partial^2 u_h}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v_h}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_h}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2} \right)] (b_{\ell, K}).$$

$$(3-4) \quad (f, v_h)_h = \sum_{K \in \tau_h} \sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell, K} (f, v_h) (b_{\ell, K})$$

où les nombres $\omega_{\ell, K}$ sont appelés les poids et les $b_{\ell, K}$ sont appelés les noeuds de la formule de quadrature.

- Le système linéaire correspondant est le suivant :

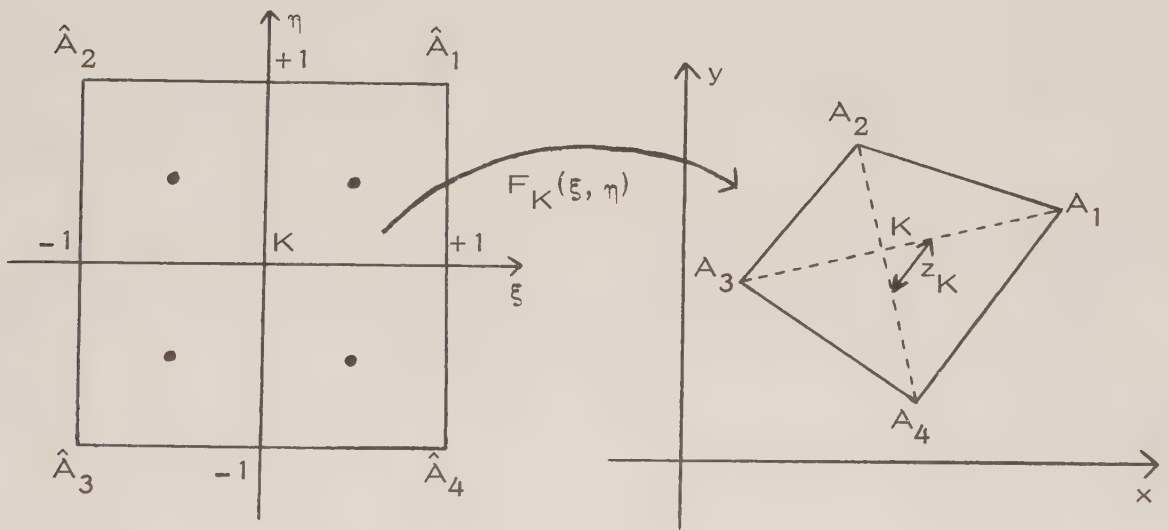
$$(3-5) \quad \begin{cases} \text{trouver } (u_k) \text{ telle que :} \\ \sum_{k=1}^M \tilde{a}_h(w_k, w_m) u_k = (f, w_m)_h \text{ pour tout } 1 \leq m \leq M \end{cases}$$

$$\text{où } \tilde{a}_h(w_k, w_m) = \sum_{K \in \tau_h} \sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell, K} [\Delta w_k \Delta w_m + (1-\sigma) \left(2 \frac{\partial^2 w_k}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_m}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_m}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \right)] (b_{\ell, K})$$

$$(f, w_m)_h = \sum_{K \in \tau_h} \sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell, K} (f, w_m)(b_{\ell, K})$$

et $(w_i)_{i=1}^M$ est une base de l'espace V_h .

On utilisera par la suite la formule de quadrature suivante qui intègre exactement les polynômes de $Q_3(\hat{K})$ et utilise les quatre points de Gauss sur le carré de référence $\hat{K} : (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}); (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}); (-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}); (\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$



(• = les quatre points de Gauss)

C'est la formule qui utilise le moins de points d'intégration ;
c'est la moins coûteuse.

z_K : dénote la distance entre les milieux des diagonales du quadrilatère convexe K .

D'après (1-56) la transformation F_K est donnée par :

$$F_K : (\xi, \eta) \in \hat{K} \longrightarrow F_K(\xi, \eta) = (x, y) \in K$$

où

$$\begin{cases} x = a + b\xi + c\eta + d\xi\eta \\ y = \alpha + \beta\xi + \gamma\eta + \delta\xi\eta \end{cases}$$

de Jacobien $J_{F_K}(\xi, \eta) = (b\gamma - c\beta) + (b\delta - \beta d)\xi + (\gamma d - \delta c)\eta$. C'est un élément de $\hat{P}_1$, linéaire par rapport à chacune des variables ξ et η .

Remarque (3-1) :

Le signe de $J_{F_K}(\xi, \eta)$ change si, localement, l'ordre des noeuds est pris dans la direction opposée. Par conséquent, on peut toujours supposer que les noeuds de K sont numérotés localement de telle sorte que $J_{F_K}(\xi, \eta) > 0$.

- On définit une formule de quadrature sur le carré de référence $\hat{K}$ par :

$$(3-6) \quad \int_{\hat{K}} \hat{\varphi}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{\ell=1}^4 \hat{\omega}_{\ell} \hat{\varphi}(\hat{b}_{\ell}), \text{ les points } (\hat{b}_{\ell})_{\ell=1}^4 \text{ sont les quatre points de Gauss.}$$

Ainsi, cette formule de quadrature (3-6) sur le carré de référence $\hat{K}$ induit une formule de quadrature suivante sur le quadrilatère K du maillage,

$$(3-7) \quad \int_K \varphi(x, y) dx dy = \sum_{\ell=1}^4 \omega_{\ell, K} \varphi(b_{\ell, K})$$

avec $\omega_{\ell, K} = \hat{\omega}_{\ell} J_{F_K}(\hat{b}_{\ell})$ et $b_{\ell, K} = F_K(\hat{b}_{\ell})$, $1 \leq \ell \leq 4$.

Les deux fonctions $\hat{\varphi} : \hat{K} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi : K = F_K(\hat{K}) \rightarrow \mathbb{R}$ sont liées par $\varphi = \hat{\varphi} \cdot F_K^{-1}$ et $\int_K \varphi(x, y) dx dy = \int_{\hat{K}} \hat{\varphi}(\xi, \eta) J_{F_K}(\xi, \eta) d\xi d\eta$.

Alors les expressions (3-3) et (3-4) s'écrivent :

$$(3-8) \quad \tilde{a}_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in \tau_h} \sum_{\ell=1}^4 \hat{\omega}_{\ell} J_{F_K}(\hat{b}_{\ell}) \left[\hat{\Delta} u_h \hat{\Delta} v_h + (1-\sigma) \left(2 \frac{\widehat{\partial^2 u_h}}{\partial x \partial y} \frac{\widehat{\partial^2 v_h}}{\partial x \partial y} - \frac{\widehat{\partial^2 u_h}}{\partial x^2} \frac{\widehat{\partial^2 v_h}}{\partial y^2} - \frac{\widehat{\partial^2 u_h}}{\partial y^2} \frac{\widehat{\partial^2 v_h}}{\partial x^2} \right) \right] (\hat{b}_{\ell})$$

$$(3-9) \quad (f, v_h)_h = \sum_{K \in \tau_h} \sum_{\ell=1}^4 \hat{\omega}_{\ell} J_{F_K}(\hat{b}_{\ell}) (\hat{f} \hat{v}_h)(\hat{b}_{\ell}).$$

3 - EXISTENCE ET UNICITE DE LA SOLUTION DU PROBLEME (3-2)

Avant de donner le théorème d'existence et d'unicité du problème (3-2), nous démontrerons le lemme suivant.

Lemme (3-1) :

Soit la transformation F bijective qui envoie $\hat{K}$ sur K ;
 $F : (\xi, \eta) \in \hat{K} \longrightarrow F(\xi, \eta) = (x, y) \in K$ donnée par (1-56) de Jacobien $J_F(\xi, \eta)$ noté J et soit $p = \hat{p} \circ F^{-1}$. Alors :

$$\begin{aligned}
 \widehat{\partial_{jj}p} &= \frac{1}{J} [\partial_{11}\hat{p}(\det(e_j, \partial_2 F))^2 + \partial_{22}\hat{p}(\det(\partial_1 F, e_j))^2 \\
 &\quad - 2\partial_{12}\hat{p} \det(e_j, \partial_2 F) \det(\partial_1 F, e_j)] \\
 (3-10) \quad &+ \frac{1}{J} [\partial_1 \hat{p} \det(e_j, \partial_1 \partial_2 F) \det(e_j, \partial_2 F) + \partial_2 \hat{p} \det(\partial_1 \partial_2 F, e_j) \det(\partial_1 F, e_j)] \\
 &+ \partial_1 \left(\frac{1}{J}\right) [(\det(e_j, \partial_2 F))^2 \partial_1 \hat{p} + \det(e_j, \partial_2 F) \det(\partial_1 F, e_j) \partial_2 \hat{p}] \\
 &+ \partial_2 \left(\frac{1}{J}\right) [\det(e_j, \partial_2 F) \det(\partial_1 F, e_j) + (\det(\partial_1 F, e_j))^2 \partial_2 \hat{p}]
 \end{aligned}$$

pour $j = 1, 2$.

Démonstration :

Nous notons par e_j le $j^{\text{ème}}$ vecteur de base de $\mathbb{R}^2$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
 \widehat{\partial_j p}(\xi, \eta) &= \partial_j p(x, y) = Dp(x, y)e_j = D\hat{p}(\xi, \eta)DF^{-1}(x, y)e_j \\
 &= D\hat{p}(\xi, \eta)(DF(\xi, \eta))^{-1}e_j.
 \end{aligned}$$

Exprimons que $f_j = (DF(\xi, \eta))^{-1}e_j$ est solution du système linéaire $DF(\xi, \eta)f_j = e_j$. Nous trouvons alors :

$$(3-96) \quad \widehat{\partial_j p}(\xi, \eta) = \frac{1}{J} [\partial_1 \hat{p}(\xi, \eta) \det(e_j, \partial_2 F) + \partial_2 \hat{p}(\xi, \eta) \det(\partial_1 F, e_j)].$$

Soit $\partial_j p = p'$, nous notons par la suite :

$$p(x, y) = p \quad ; \quad \hat{p}(\xi, \eta) = \hat{p}.$$

Nous aurons :

$$\begin{aligned}
 \widehat{\partial_{jj}p} &= \widehat{\partial_j p^i} = \frac{1}{J} [\partial_1 \hat{p}^i \det(e_j, \partial_2 F) + \partial_2 \hat{p}^i \det(\partial_1 F, e_j)] \\
 J \widehat{\partial_{jj}p} &= \{\partial_1 [\frac{1}{J} (\partial_1 \hat{p} \det(e_j, \partial_2 F) + \partial_2 \hat{p} \det(\partial_1 F, e_j))] \det(e_j, \partial_2 F) \\
 &\quad + \partial_2 [\frac{1}{J} (\partial_1 \hat{p} \det(e_j, \partial_2 F) + \partial_2 \hat{p} \det(\partial_1 F, e_j))] \det(\partial_1 F, e_j)\} \\
 &= \partial_1 \left(\frac{1}{J}\right) [\partial_1 \hat{p} \det(e_j, \partial_2 F) + \partial_2 \hat{p} \det(\partial_1 F, e_j)] \det(e_j, \partial_2 F) \\
 &\quad + \frac{1}{J} [\partial_{11} \hat{p} \det(e_j, \partial_2 F) + \partial_1 \hat{p} \det(e_j, \partial_{12} F) \\
 &\quad + \partial_{12} \hat{p} \det(\partial_1 F, e_j) + \partial_2 \hat{p} \det(\partial_{11} F, e_j)] \det(e_j, \partial_2 F) \\
 &\quad + \partial_2 \left(\frac{1}{J}\right) [\partial_1 \hat{p} \det(e_j, \partial_2 F) + \partial_2 \hat{p} \det(\partial_1 F, e_j)] \det(\partial_1 F, e_j) \\
 &\quad + \frac{1}{J} [\partial_{12} \hat{p} \det(e_j, \partial_2 F) + \partial_1 \hat{p} \det(e_j, \partial_{22} F) \\
 &\quad + \partial_{22} \hat{p} \det(\partial_1 F, e_j) + \partial_2 \hat{p} \det(\partial_{12} F, e_j)] \det(\partial_1 F, e_j)
 \end{aligned}$$

avec $(\det(\partial_i F, \partial_j F))' = \det((\partial_i F)', \partial_j F) + \det(\partial_i F, (\partial_j F)')$ et $(e_i)' = 0 \quad i = 1, 2$.

En remarquant que $\det(\partial_{ii} F, e_j) = 0 \quad i = 1, 2$, nous aurons :

$$\begin{aligned}
 J \widehat{\partial_{jj}p} &= \frac{1}{J} [\partial_{11} \hat{p} (\det(e_j, \partial_2 F))^2 + \partial_{22} \hat{p} (\det(\partial_1 F, e_j))^2 \\
 &\quad - 2 \partial_{12} \hat{p} \det(e_j, \partial_2 F) \cdot \det(e_j, \partial_1 F)] \\
 (3-11) \quad &+ \frac{1}{J} [\partial_1 \hat{p} \det(e_j, \partial_{12} F) \cdot \det(e_j, \partial_2 F) + \partial_2 \hat{p} \det(\partial_{12} F, e_j) \det(\partial_1 F, e_j)] \\
 &+ [\partial_1 \left(\frac{1}{J}\right) \det(e_j, \partial_2 F) + \partial_2 \left(\frac{1}{J}\right) \det(\partial_1 F, e_j)] \cdot \\
 &[\partial_1 \hat{p} \det(e_j, \partial_2 F) + \partial_2 \hat{p} \det(\partial_1 F, e_j)].
 \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Remarque (3-2) :

$$\text{Par exemple pour } j = 1, \partial_{11} v_h = \frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2}$$

$$\text{on a } \det(\partial_1 F, e_1) = -\frac{\partial y}{\partial \xi} ; \det(e_1, \partial_2 F) = \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

$$\det(e_1, \partial_{12} F) = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} ; \det(\partial_{12} F, e_1) = -\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta}$$

donc,

$$\begin{aligned} \widehat{J \frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2}} &= \frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right] \\ (3-12) \quad &+ \frac{1}{J} \left[\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} \right] \\ &- \frac{J'_\xi}{J^2} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} \right] + \frac{J'_\eta}{J^2} \left[\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} \right]. \end{aligned}$$

Pour $j = 2, \partial_{22} v_h = \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2}$, $\widehat{\frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2}}$ aura la même expression en changeant

y en x dans l'expression précédente

donc :

$$\begin{aligned} \widehat{J \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2}} &= \frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right] \\ (3-13) \quad &+ \frac{1}{J} \left[\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} \right] \\ &- \frac{J'_\xi}{J^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} \right] + \frac{J'_\eta}{J^2} \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} \right] \end{aligned}$$

$$\text{pour } i = 1, j = 2 \quad \partial_{ij} v_h = \frac{\partial^2 v_h}{\partial x \partial y}.$$

Nous aurons :

$$\begin{aligned}
 (3-14) \quad J \frac{\widehat{\partial^2 v_h}}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{J} \left[-\frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \eta^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right] \\
 &+ \frac{1}{J} \left[-\frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right] \\
 &- \frac{J'_\xi}{J^2} \left[-\frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right] + \frac{J'_\eta}{J^2} \left[-\frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right].
 \end{aligned}$$

Remarque (3-3) :

Nous allons donner quelques notations qui seront utiles dans tout ce chapitre.

D'après l'expression (1-56), nous avons :

$$(3-15) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial \eta} = \gamma + \delta \xi & \frac{\partial x}{\partial \eta} = c + d \xi \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} = \beta + \delta \eta & \frac{\partial x}{\partial \xi} = b + d \eta \end{cases} ;$$

$$(3-16) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial \xi \partial \eta} = \delta, \quad \frac{\partial x}{\partial \xi \partial \eta} = d, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \in \hat{P}_2(\xi), \quad \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \in \hat{P}_2(\eta) \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \text{ et } \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \in \hat{Q}_1. \end{cases}$$

La triangulation est supposée régulière ; nous savons (Ciarlet - Raviart [9]) que :

$$(3-17) \quad \begin{cases} J_{F_K}(\xi, \eta) \geq \hat{c}_1 h_K^2 \\ b, c, \beta, \gamma \leq \hat{c}_2 h_K \\ \delta, d \leq \hat{c}_3 z_K \end{cases}$$

$$(3-18) \quad J'_\xi = (b\delta - d\beta), \quad J'_\eta = (d\gamma - c\delta) \quad \text{notés par la suite } J'_\xi = J'_\eta = J'$$

qui sont d'ordre $(h_K z_K)$ (voir (2-21)).

$$(3-19) \quad \text{Pour } \hat{w}_h \in \hat{P}_K \text{ on a } \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \eta^2} \in \hat{Q}_1 \text{ et } \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi \partial \eta} \in \hat{P}_2.$$

Pour $\hat{v}_h \in \hat{P}_K$ l'expression (1-66) donne :

$$(3-20) \quad \begin{cases} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} = \frac{\partial P_0(\xi)}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial P_1(\xi)}{\partial \xi} + \eta^2 \frac{\partial P_2(\xi)}{\partial \xi} + \eta^3 \frac{\partial P_3(\xi)}{\partial \xi} \in \hat{P}_3 \\ \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} = P_1(\xi) + 2\eta P_2(\xi) + 3\eta^2 P_3(\xi) \in \hat{P}_3. \end{cases}$$

Théorème (3-1) :

Soit $(\tau_h)_h$ une famille régulière du quadrangulation définie par référence à l'élément $(\hat{K}, \hat{P}_K, \hat{\Sigma}_K)$, supposons,

$$(3-21) \quad (i) \quad P_3(\hat{K}) \subset \hat{P}_K \subset \hat{Q}_3(\hat{K}) \quad (\text{toujours vrais})$$

$$(3-22) \quad (ii) \quad \text{La formule de quadrature donnée sur } \hat{K} \text{ de référence}$$

$$\int_{\hat{K}} \hat{\phi}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{\ell=1}^4 \hat{\omega}_\ell \hat{\phi}(\hat{b}_\ell) \quad \text{avec } \hat{\omega}_\ell > 0, \quad 1 \leq \ell \leq 4, \text{ est}$$

celle définie par (3-6), i. e. formule exacte pour $Q_3(\hat{K})$.

$$(3-23) \quad (iii) \quad \text{La condition } z h^{-2} \text{ petit devant } 1 \text{ est vérifiée.}$$

Alors il existe une constante $\tilde{\alpha} > 0$ indépendante de h telle que pour toute forme linéaire approchée $\tilde{a}_h(\cdot, \cdot)$ du type (3-3) et pour tout espace V_h on ait :

$$(3-24) \quad \forall v_h \in V_h \quad \tilde{a}_h(v_h, v_h) \geq \tilde{\alpha} \|v_h\|_h^2$$

Démonstration :

En tenant compte de l'expression (1-6),

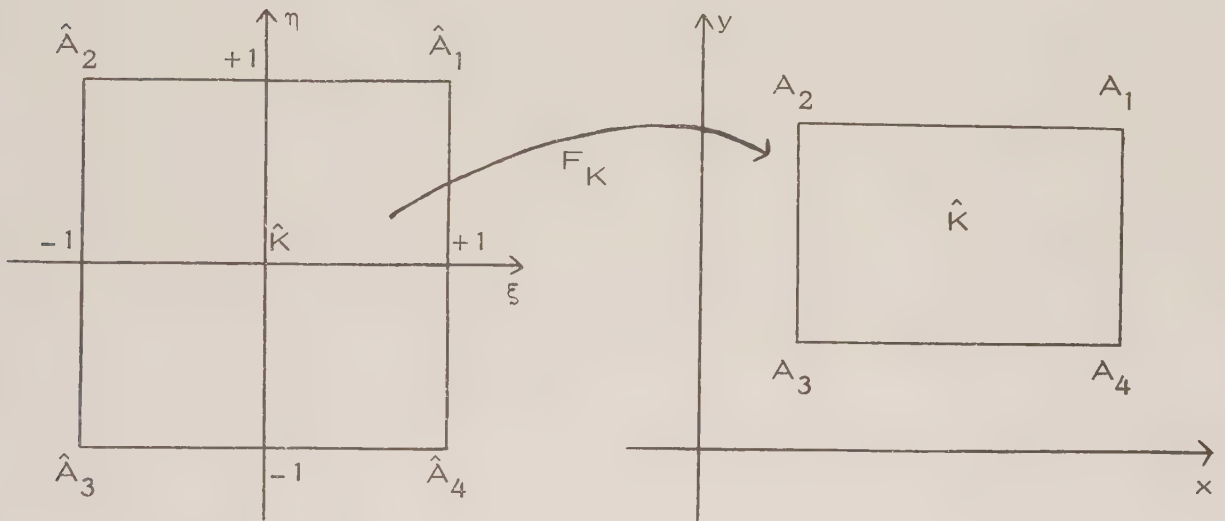
$$\tilde{a}_h(v_h, v_h) = \sum_{K \in \tau_h} \sum_{\ell=1}^4 \omega_{\ell, K} \left[\sigma(\Delta v_h)^2 + (1-\sigma) \left(\left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} \right)^2 \right) \right] (b_{\ell, K})$$

et nous remarquons que :

$$(3-25) \quad \tilde{a}(v_h, v_h) \geq c \sum_{K \in \tau_h} \sum_{\ell=1}^4 \omega_{\ell, K} \left[\left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} \right)^2 \right] (b_{\ell, K}).$$

a) Cas où la transformation F_K est affine :

Dans un premier temps, nous allons démontrer le théorème dans le cas où la transformation bijective F_K est affine.



D'après (1-15) F_K sera définie par :

$$F_K(\xi, \eta) \in \hat{K} \longrightarrow F_K(\xi, \eta) = (x, y) \in K$$

$$F_K(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\xi}{2} x_2 + \frac{1-\xi}{2} x_1 \\ \frac{1+\eta}{2} y_2 + \frac{1-\eta}{2} y_1 \end{pmatrix}$$

$$F_K(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(x_2 - x_1) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(y_2 - y_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_2 + x_1 \\ y_2 + y_1 \end{bmatrix}$$

C'est la forme

(3-26) $F_K : \hat{x} \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow F_K(\hat{x}) = B_K \hat{x} + b_K \in \mathbb{R}^2$ où B_K est la matrice constante. Nous aurons dans ce cas l'espace d'élément fini P_K

$$P_K = P_3 \cup \{x^3 y\} \cup \{xy^3\}.$$

Etape 1 :

Les poids $\hat{w}_\ell$ sont positifs. Soit $\hat{p} \in \hat{P}_K$ si $\sum_{\ell=1}^4 \hat{w}_\ell \sum_{|i|=2} \left(\partial^i \hat{p}(\hat{b}_\ell) \right)^2 = 0$

alors :

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \xi^2}(\hat{b}_\ell) = \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \eta^2}(\hat{b}_\ell) = \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \xi \partial \eta}(\hat{b}_\ell) = 0 \quad 1 \leq \ell \leq 4$$

or :

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \xi^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \eta^2} \in \hat{Q}_1 \quad (\text{relation 3-19}).$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \eta^2} = 0 \quad \text{sur } \hat{K}, \text{ on en déduit que } \hat{p} \text{ est de la forme}$$

$$\hat{p} = a + b\xi + c\eta + d\xi\eta ; \quad \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \xi \partial \eta} = d.$$

Puisque $\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \xi \partial \eta}(\hat{b}_\ell) = 0$ on a donc :

$$d = 0 ; \quad \hat{p} = a + b\xi + c\eta \in P_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \text{sur } \hat{K}.$$

Par suite, l'application

(3-27) $\hat{p} \longrightarrow \left(\sum_{\ell=1}^4 \hat{w}_\ell \sum_{|i|=2} \left(\partial^i \hat{p}(\hat{b}_\ell) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ est donc une norme sur

l'espace P_K/P_1 de dimension finie. Etant donné que l'application $\hat{p} \longrightarrow |\hat{p}|_{2,\hat{K}}$ définit aussi une norme sur cet espace (cf. Ciarlet [4], th.1, n°6), donc la norme définie par (3-27) est équivalente à la norme $\hat{p} \longrightarrow |\hat{p}|_{2,\hat{K}}$ i.e. il existe une constante $\hat{c} > 0$ telle que :

$$(3-28) \quad \hat{c} |\hat{p}|_{2, \hat{K}} \leq \left(\sum_{\ell=1}^4 \hat{w}_{\ell} \sum_{|i|=2} \left(\partial^i \hat{p}(\hat{b}_{\ell}) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Etape 2 :

Pour une fonction $v_h \in V_h$, nous posons, $v_h|_K = p$. Soit $\hat{p} \in \hat{P}_K$, la fonction associée à p , par $\hat{p} = p \circ F_K$, F_K étant de Jacobien constant $= \det B_K > 0$ (Remarque (3-1)).

Nous reprendrons les notations du chapitre 0

$$\partial_{ii}^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad \partial_{ij}^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}, \text{ parfois } (x, y) \text{ est noté } (x_1, x_2) = x.$$

Par définition, il vient :

$$\partial_{ij}^2 \hat{p}(\hat{x}) = D^2 \hat{p}(\hat{x}) \cdot (\vec{e}_i, \vec{e}_j) \quad 1 \leq i, j \leq 2$$

$$D^2 \hat{p}(\hat{x}) \cdot (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = Dp(x) (D^2 F_K(\hat{x}) \cdot (\vec{e}_i, \vec{e}_j)) + D^2 p(x) \cdot (DF_K(\hat{x}) \vec{e}_i, DF_K(\hat{x}) \vec{e}_j).$$

Comme F_K est affine, il vient :

$$D^2 \hat{p}(\hat{x}) \cdot (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = D^2 p(x) (B_K \vec{e}_i, B_K \vec{e}_j).$$

En interprétant $D^2 p(x)$ comme la matrice

$$\begin{pmatrix} \partial_{11}^2 p(x) & \partial_{12}^2 p(x) \\ \partial_{21}^2 p(x) & \partial_{22}^2 p(x) \end{pmatrix}$$

Nous aurons la majoration

$$(\partial_{ij}^2 \hat{p}(\hat{x}))^2 \leq \|B_K\|^4 \sum_{1 \leq i, j \leq 2} (\partial_{ij}^2 p(x))^2$$

d'où

$$\sum_{1 \leq i, j \leq 2} (\partial_{ij}^2 \hat{p}(\hat{x}))^2 \leq 4 \|B_K\|^4 \sum_{1 \leq i, j \leq 2} (\partial_{ij}^2 p(x))^2$$

ce qui permet d'écrire :

$$(3-29) \quad \text{ou} \quad \sum_{|i|=2} (\partial^i \hat{p}(\hat{x}))^2 \leq 4 \|B_K\|^4 \sum_{|i|=2} (\partial^i p(x))^2$$

$$\sum_{|i|=2} (\partial^i p(x))^2 \geq c \|B_K\|^{-4} \sum_{|i|=2} (\partial^i \hat{p}(\hat{x}))^2.$$

Il résulte :

$$(3-30) \quad \sum_{\ell=1}^4 \omega_{\ell,K} \sum_{|i|=2} (\partial^i p(b_{\ell,K}))^2 \geq c \det B_K \|B_K\|^{-4} \sum_{\ell=1}^4 \hat{\omega}_{\ell} \sum_{|i|=2} (\partial^i \hat{p}(\hat{b}_{\ell}))^2$$

D'après l'étape 1

$$\sum_{\ell=1}^4 \omega_{\ell,K} \sum_{|i|=2} (\partial^i p(b_{\ell,K}))^2 \geq c \det B_K \|B_K\|^{-4} |\hat{p}|_{2,\hat{K}}^2.$$

Nous avons l'inégalité suivante (Ciarlet cours de DEA 1977 Paris VI)

$$|p|_{2,K} \leq c \|B_K^{-1}\|^2 (\det B_K)^{\frac{1}{2}} |\hat{p}|_{2,\hat{K}}$$

$$\Rightarrow |\hat{p}|_{2,\hat{K}} \geq \hat{c} \|B_K^{-1}\|^{-2} (\det B_K)^{-\frac{1}{2}} |p|_{2,K}$$

$$\text{et} \quad |\hat{p}|_{2,\hat{K}}^2 \geq \hat{c} \|B_K^{-1}\|^{-4} (\det B_K)^{-1} |p|_{2,K}^2$$

ce qui donne :

$$\sum_{\ell=1}^4 \omega_{\ell,K} \sum_{|i|=2} (\partial^i p(b_{\ell,K}))^2 \geq \hat{c} \det B_K \|B_K\|^{-4} \|B_K^{-1}\|^{-4} (\det B_K)^{-1} |p|_{2,K}^2$$

Puisqu'on a supposé une famille de quadrangulation régulière, il existe une constante $\hat{c} > 0$ telle que :

$$\|B_K\|^{-4} \|B_K^{-1}\|^{-4} \leq \hat{c}.$$

Nous déduisons donc :

$$\sum_{\ell=1}^4 \omega_{\ell,K} \sum_{|i|=2} (\partial^i p(b_{\ell,K}))^2 \geq \hat{c} |p|_{2,K}^2$$

$$\text{et}$$

$$\sum_{K \in \tau_h} \sum_{\ell=1}^4 \omega_{\ell,K} \sum_{|i|=2} (\partial^i p(b_{\ell,K}))^2 \geq \hat{c} \sum_{K \in \tau_h} |p|_{2,K}^2 = \hat{c} \sum_{K \in \tau_h} |v_h|_{2,K}^2$$

$$\text{i. e.} \quad \sum_{K \in \tau_h} \sum_{\ell=1}^4 \omega_{\ell, K} \left| \sum_{|i|=2} \left(\partial^i p(b_{\ell, K}) \right)^2 \right| \geq \hat{c} \|v_h\|_h^2.$$

D'après (3-25)

$$(3-31) \quad \tilde{a}_h(v_h, v_h) \geq c \sum_{K \in \tau_h} \sum_{\ell=1}^4 \omega_{\ell, K} \left| \sum_{|i|=2} \left(\partial^i v_h(b_{\ell, K}) \right)^2 \right| \geq \tilde{\alpha} \|v_h\|_h^2.$$

Alors il existe bien une constante $\tilde{\alpha} > 0$ indépendante de h telle que :

$$\tilde{a}_h(v_h, v_h) \geq \tilde{\alpha} \|v_h\|_h^2.$$

b) Cas où la transformation F_K est non affine :

Le Jacobien de la transformation F_K noté J est positif.

D'après (3-25) on a :

$$(3-32) \quad \tilde{a}_h(v_h, v_h) \geq c \sum_{K \in \tau_h} \sum_{\ell=1}^4 \hat{\omega}_{\ell} \left\{ J \left[\widehat{\left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2} \right)^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} \right)^2 \right] \right\} (\hat{b}_{\ell}).$$

Soit l'inégalité suivante :

$$(3-33) \quad 2pq \leq \frac{1}{\epsilon} |p|^2 + \epsilon |q|^2 \quad \text{pour tout } \epsilon > 0.$$

Nous allons essayer de minorer l'expression :

$$(3-34) \quad \sum_{\ell=1}^4 \hat{\omega}_{\ell} \left\{ J \left[\widehat{\left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2} \right)^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} \right)^2 \right] \right\} (\hat{b}_{\ell}).$$

Nous développons chaque terme de (3-34) à partir de (3-12), (3-13) et (3-14) et en tenant compte de (3-33) pour $\epsilon = 2$, nous aurons :

$$(3-35) \quad J \left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2} \right)^2 \geq \frac{1}{2J} \left\{ \frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right] \right\}^2$$

$$- \frac{1}{J} \left\{ \frac{1}{J} \left[\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} \right] - \frac{J_{\xi}'}{J^2} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} \right] \right\}$$

$$+ \frac{J_{\eta}'}{J^2} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} \right] \right\}^2$$

$$\begin{aligned}
 (3-36) \quad J \left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} \right)^2 &\geq \frac{1}{2J} \left\{ \frac{1}{J} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right] \right\}^2 \\
 &\quad - \frac{1}{J} \left\{ \frac{1}{J} \left[\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} \right] - \frac{J'_\xi}{J^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} \right] \right\} \\
 &\quad + \frac{J'_\eta}{J^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} \right] \right\}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3-37) \quad J \left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial x \partial y} \right)^2 &\geq \frac{1}{2J} \left\{ \frac{1}{J} \left[- \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right] \right\}^2 \\
 &\quad - \frac{1}{J} \left\{ - \frac{1}{J} \left[\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} \right] - \frac{J'_\xi}{J^2} \left[- \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} \right] \right\} \\
 &\quad + \frac{J'_\eta}{J^2} \left[- \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} \right] \right\}^2.
 \end{aligned}$$

Alors (3-35), (3-36) et (3-37) impliquent que (3-34) est minoré par la somme de deux types de termes : termes ne comportant que des dérivées secondes de v_h , dits termes de "type D^2 " et termes ne comportant que des dérivées premières de v_h dits termes de "type D ".

Etape 1 :

Intéressons-nous d'abord aux termes de "type D ". Nous pouvons remarquer que les coefficients intervenant devant chaque terme de "type D " sont tous de même ordre, i. e. d'après (3-17) et (3-18) sont d'ordre $(z_K h_K^{-1})$. Il suffit alors de majorer un terme ; par exemple :

$$\left\{ \frac{1}{J} \left[\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} \right] \right\}^2 (\hat{b}_\ell) \quad \text{pour } 1 \leq \ell \leq 4$$

pour minorer les termes de "type D ".

Lemme (3-2) :

Il existe une constante $\hat{c}$ indépendante de h telle que :

$$\begin{aligned}
 (3-38) \quad & \left| \left\{ \frac{1}{J} \left[\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} \right] \right\}^2 (\hat{b}_\ell) \right| \\
 & \leq \hat{c} \left(\frac{z_K}{h_K} \right)^2 |\hat{v}_h|_{1, \hat{K}}^2 \quad \text{pour tout } \hat{v}_h \in \hat{P}_K \text{ et pour } 1 \leq \ell \leq 4 \\
 \text{et} \quad & -\frac{1}{J} \left\{ \frac{1}{J} \left[\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} \right] \right\}^2 (\hat{b}_\ell) \geq -\hat{c} \left(\frac{z_K}{h_K} \right)^2 |\hat{v}|_{1, \hat{K}}^2.
 \end{aligned}$$

Preuve :

Nous avons :

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{1}{J} \left[\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} \right] \right\}^2 (\hat{b}_\ell) \\
 & \leq 2 \left(\left| \frac{1}{J} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} (\hat{b}_\ell) \right|^2 \left| \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} (\hat{b}_\ell) \right|^2 + \left| \frac{1}{J} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} (\hat{b}_\ell) \right|^2 \left| \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} (\hat{b}_\ell) \right|^2 \right).
 \end{aligned}$$

Nous savons que :

$$(3-39) \quad \left| \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} (\hat{b}_\ell) \right| \leq \hat{c}_1 \left| \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} \right|_{0, \hat{K}}, \quad \left| \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} (\hat{b}_\ell) \right| \leq \hat{c}_2 \left| \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} \right|_{0, \hat{K}} \quad \text{pour tout } \hat{b}_\ell.$$

D'après les inégalités (3-17), il résulte que :

$$(3-40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{1}{J} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} (\hat{b}_\ell) \right| \leq \hat{c}_3 z_K h_K^{-1} \\ \left| \frac{1}{J} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} (\hat{b}_\ell) \right| \leq \hat{c}_4 z_K h_K^{-1}. \end{array} \right.$$

Alors les majorations (3-39) et (3-40) impliquent que :

$$\begin{aligned}
 & \left| \left\{ \frac{1}{J} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} \right) \right\}^2 \right| \\
 & \leq \hat{c} \left(\frac{z_K}{h_K} \right)^2 \left(\left| \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} \right|_{0, \hat{K}}^2 + \left| \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} \right|_{0, \hat{K}}^2 \right) = \hat{c} \left(\frac{z_K}{h_K} \right)^2 |\hat{v}_h|_{1, \hat{K}}^2
 \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Il résulte alors que :

$$(3-41) \quad -\frac{1}{J} \left\{ \frac{1}{J} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \eta} \right) \right\}^2 (\hat{b}_\ell) \\ \geq -\hat{c} \left(\frac{2K}{h_K} \right)^2 |\hat{v}_h|_{1,K}^2.$$

Etape 2 : termes de "type D^2 " :

Nous allons minorer

$$\sum_{\ell=1}^4 \frac{1}{2J^3} \left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \eta^2} \right) - 2 \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right\}^2 (\hat{b}_\ell) \\ + \sum_{\ell=1}^4 \frac{1}{2J^3} \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \eta^2} \right) - 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right\}^2 (\hat{b}_\ell) \\ + \sum_{\ell=1}^4 \frac{1}{2J^3} \left\{ -\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right\}^2 (\hat{b}_\ell).$$

Lemme (3-3) :

Pour un point quelconque $\hat{b}_\ell$ des quatre points de Gauss le système

$$(3-42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} (\hat{b}_\ell) + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \eta^2} (\hat{b}_\ell) - 2 \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} (\hat{b}_\ell) = 0 \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} (\hat{b}_\ell) + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \eta^2} (\hat{b}_\ell) - 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} (\hat{b}_\ell) = 0 \\ -\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} (\hat{b}_\ell) = 0 \end{array} \right.$$

admet une solution unique

$$(3-43) \quad \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} (\hat{b}_\ell) = \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \eta^2} (\hat{b}_\ell) = \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} (\hat{b}_\ell) = 0.$$

Démonstration :

$$\text{Si nous notons } A = \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta}\right)^2 (\hat{b}_\ell) ; B = \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi}\right)^2 (\hat{b}_\ell) ; C = \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta}\right) (\hat{b}_\ell)$$

$$A_1 = \left(\frac{\partial X}{\partial \eta}\right)^2 (\hat{b}_\ell) ; B_1 = \left(\frac{\partial X}{\partial \xi}\right)^2 (\hat{b}_\ell) ; C_1 = \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial X}{\partial \eta}\right) (\hat{b}_\ell)$$

$$A_2 = \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} \frac{\partial X}{\partial \eta}\right) (\hat{b}_\ell) ; B_2 = \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial X}{\partial \xi}\right) (\hat{b}_\ell) ; C_2 = \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial X}{\partial \eta} \frac{\partial Y}{\partial \xi}\right) (\hat{b}_\ell)$$

Le système (3-43) admet une solution si la matrice

$$(3-44) \quad M = \begin{pmatrix} A & B & -2C \\ A_1 & B_1 & -2C_1 \\ -A_2 & -B_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

est inversible, ce qui est équivalent à $\det M \neq 0$.

$$\det M = A (B_1 C_2 - 2 C_1 B_2) - A_1 (B C_2 - 2 C B_2) - A_2 (-2 C_1 B + 2 C B_1).$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \cdot (B_1 C_2 - 2 C_1 B_2) &= \left(\frac{\partial X}{\partial \xi}\right)^2 (\hat{b}_\ell) \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial X}{\partial \eta} \frac{\partial Y}{\partial \xi}\right) (\hat{b}_\ell) - 2 \left(\frac{\partial X}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial X}{\partial \eta} (\hat{b}_\ell) \\ &= \left(\frac{\partial X}{\partial \xi}\right)^2 (\hat{b}_\ell) \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta} - \frac{\partial X}{\partial \eta} \frac{\partial Y}{\partial \xi}\right) (\hat{b}_\ell) \\ &= \left(\frac{\partial X}{\partial \xi}\right)^2 (\hat{b}_\ell) J(\hat{b}_\ell) \end{aligned}$$

$$(3-45) \quad A (B_1 C_2 - 2 C_1 B_2) = \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta}\right)^2 (\hat{b}_\ell) \left(\frac{\partial X}{\partial \xi}\right)^2 (\hat{b}_\ell) J(\hat{b}_\ell)$$

$$\begin{aligned} \cdot (B C_2 - 2 C B_2) &= \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi}\right)^2 (\hat{b}_\ell) \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial X}{\partial \eta} \frac{\partial Y}{\partial \xi}\right) (\hat{b}_\ell) - 2 \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial Y}{\partial \eta} \frac{\partial X}{\partial \xi} (\hat{b}_\ell) \\ &= \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi}\right)^2 (\hat{b}_\ell) \left(\frac{\partial X}{\partial \eta} \frac{\partial Y}{\partial \xi} - \frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta}\right) (\hat{b}_\ell) = - \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi}\right)^2 (\hat{b}_\ell) J(\hat{b}_\ell) \end{aligned}$$

$$(3-46) \quad -A_2 (B C_2 - 2 C B_2) = \left(\frac{\partial X}{\partial \eta}\right)^2 (\hat{b}_\ell) \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi}\right)^2 (\hat{b}_\ell) J(\hat{b}_\ell)$$

$$\begin{aligned} \cdot -2 C_1 B + 2 C B_1 &= -2 \left[\left(\frac{\partial Y}{\partial \xi}\right)^2 (\hat{b}_\ell) \frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial X}{\partial \eta} (\hat{b}_\ell) - \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta} (\hat{b}_\ell) \left(\frac{\partial X}{\partial \xi}\right)^2 (\hat{b}_\ell) \right] \\ &= -2 \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi}\right) (\hat{b}_\ell) \left(\frac{\partial X}{\partial \xi}\right) (\hat{b}_\ell) \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta}\right) (\hat{b}_\ell) \\ &= 2 \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi}\right) (\hat{b}_\ell) \left(\frac{\partial X}{\partial \xi}\right) (\hat{b}_\ell) J(\hat{b}_\ell). \end{aligned}$$

$$(3-47) \quad -A_2 \left(-2 C_1 B + 2 C B_1 \right) = -2 \frac{\partial y}{\partial \eta} (\hat{b}_\ell) \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) (\hat{b}_\ell) \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) (\hat{b}_\ell) \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right) (\hat{b}_\ell) J(\hat{b}_\ell).$$

Nous regroupons les expressions de (3-45) à (3-47) ; nous aurons :

$$\begin{aligned} \det M &= J(\hat{b}_\ell) \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 (\hat{b}_\ell) \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 (\hat{b}_\ell) + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 (\hat{b}_\ell) \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 (\hat{b}_\ell) - 2 \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} (\hat{b}_\ell) \right] \\ &= J(\hat{b}_\ell) \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 (\hat{b}_\ell) \end{aligned}$$

$$(3-48) \quad \text{d'où } \det M = \left(J(\hat{b}_\ell) \right)^3.$$

D'après l'hypothèse $J(\hat{b}_\ell) > 0$, il résulte que $\det M > 0$, ce qui permet de conclure que le système admet bien une solution unique

$$(3-49) \quad \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} (\hat{b}_\ell) = \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \eta^2} (\hat{b}_\ell) = \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} (\hat{b}_\ell) = 0$$

C. Q. F. D.

En utilisant la stricte positivité de J , il vient pour $\hat{v}_h \in \hat{P}_K$, l'expression :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J^3} \left\{ \sum_{\ell=1}^4 \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right]^2 (\hat{b}_\ell) \right. \\ & + \sum_{\ell=1}^4 \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right]^2 (\hat{b}_\ell) \\ & \left. + \sum_{\ell=1}^4 \left[-\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right]^2 (\hat{b}_\ell) \right\} \end{aligned}$$

sera identiquement nulle si et seulement si :

$$(3-50) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} (\hat{b}_\ell) + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \eta^2} (\hat{b}_\ell) - 2 \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} (\hat{b}_\ell) = 0 \\ & \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} (\hat{b}_\ell) + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \eta^2} (\hat{b}_\ell) - 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} (\hat{b}_\ell) = 0 \\ & -\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} (\hat{b}_\ell) - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \eta^2} (\hat{b}_\ell) + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} (\hat{b}_\ell) = 0 \end{aligned} \right.$$

pour $1 \leq \ell \leq 4$.

D'après le lemme (3-3), nous aurons :

$$\frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2}(\hat{b}_\ell) = \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \eta^2}(\hat{b}_\ell) = \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta}(\hat{b}_\ell) = 0 \quad \text{pour } 1 \leq \ell \leq 4.$$

Or $\frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2}$ et $\frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \eta^2} \in \hat{Q}_1$ (relation (3-19)) ; on déduit

$$(3-51) \quad \hat{v}_h = a + b\xi + c\eta \in P_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \equiv 0 \quad \text{sur } \hat{K},$$

(voir étape 1).

Par suite l'application

$$\begin{aligned} \hat{v}_h \rightarrow |\hat{v}|_{2,\hat{K}} &= \left(\frac{1}{J(\hat{b}_\ell)} \right)_{\ell=1}^4 \hat{w}_\ell \left\{ \frac{1}{2J^2} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right]^2 \right. \\ &\quad + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right]^2 \\ &\quad \left. + \left[-\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right]^2 \right\} (\hat{b}_\ell)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

définit une norme sur l'espace quotient $\hat{P}_K|_{P_1(\hat{K})}$. Etant donné que

l'application $\hat{v}_h \rightarrow |\hat{v}_h|_{2,\hat{K}}$ définit aussi une norme sur cet espace (cf. Ciarlet [4], th. 1, n°6), il existe alors une constante $\hat{c}$ telle que :

$$(3-52) \quad |\hat{v}_h|_{2,\hat{K}} \geq \frac{\hat{c}}{(\inf J)^{\frac{1}{2}}} |\hat{v}_h|_{2,\hat{K}}.$$

Des lemmes (3-2) et (3-3), avec l'inégalité (3-52), nous pouvons conclure qu'il existe une constante $\hat{c}_0$ telle que :

$$\begin{aligned} (3-53) \quad & \sum_{\ell=1}^L \hat{w}_\ell \left\{ J \left[\left(\frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} (\hat{b}_\ell) \\ & \geq \frac{\hat{c}_0}{\inf J} |\hat{v}_h|_{2,\hat{K}}^2 - c \left(\frac{Z_K}{h_K^2} \right)^2 |\hat{v}_h|_{1,\hat{K}}^2. \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité (lemme (0-5), expression (0-20))

$$(3-54) \quad |v_h|_{2,K} \leq c |J|_{0,\infty,\hat{K}}^{\frac{1}{2}} \left(|F_K^{-1}|_{1,\infty,K}^2 |\hat{v}|_{2,\hat{K}} + |F_K^{-1}|_{2,\infty,K} |\hat{v}_h|_{1,\hat{K}} \right).$$

Pour $\frac{z_K}{h_K}$ petit, on a :

$$(3-55) \quad \begin{cases} |F_K^{-1}|_{1,\infty,\hat{K}} \leq c h_K^{-1} \\ |F_K^{-1}|_{2,\infty,\hat{K}} \leq c \frac{z_K}{h_K^3}. \end{cases}$$

On en déduit :

$$|v_h|_{2,K} \leq c \left(h_K^{-1} |\hat{v}|_{2,\hat{K}} + \frac{z_K}{h_K^2} |\hat{v}_h|_{1,\hat{K}} \right).$$

D'où (puisque $|\hat{v}_h|_{1,\hat{K}} \leq c_1 |v_h|_{1,K}$)

$$(3-56) \quad \frac{1}{J} |\hat{v}_h|_{2,\hat{K}}^2 \geq c |v|_{2,K}^2 - c_2 \left(\frac{z_K}{h_K^2} \right)^2 |v_h|_{1,K}^2.$$

On en déduit de (3-53) et (3-56)

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^4 \hat{w}_{\ell} \left\{ J \left(\widehat{\left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2} \right)^2} + \widehat{\left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} \right)^2} + \widehat{\left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial x \partial y} \right)^2} \right) \right\} (\hat{b}_{\ell}) \\ & \geq c_3 |v|_{2,K}^2 - c_4 \left(\frac{z_K}{h_K^2} \right)^2 |v_h|_{1,K}^2. \end{aligned}$$

D'après le lemme (2-1), on a pour $\max_K \frac{z_K}{h_K^2}$ petit devant 1

$$\|v_h\|_{1,\Omega} \leq c \|v_h\|_h \quad \text{en particulier} \quad |v_h|_{1,\Omega} \leq c \|v_h\|_h.$$

Il vient donc (pour $\frac{z_K}{h_K^2}$ petit)

$$\sum_{K \in \tau_h} \sum_{\ell=1}^4 \hat{w}_\ell \left\{ J \left(\left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_h}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right\} (\hat{b}_\ell)$$

$$\geq c \|v_h\|_h^2 \quad \text{où } c \text{ est indépendante de } h$$

(3-57) et $\tilde{a}_h(v_h, v_h) \geq \tilde{\alpha} \|v_h\|_h^2$ où $\tilde{\alpha}$ est indépendante de h .

ce qui démontre le théorème dans tous les cas.

Nous revenons sur la démonstration de (3-55) i. e. montrons que

$$|F_K^{-1}|_{1,\infty,K} \leq c h_K^{-1} \quad \text{et} \quad |F_K^{-1}|_{2,\infty,K} \leq c \frac{z_K}{h_K^3} \quad \text{sous l'hypothèse } \frac{z_K}{h_K} \text{ petit.}$$

On fait comme dans Ciarlet [4] pp. 173 à 175. On pose :

(3-58) $DF_K(\xi, \eta) = B + E(\xi, \eta)$

avec

$DF_K =$ forme 1-linéaire à deux composantes

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

(3-59) $B =$ matrice $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi}(0,0) & \frac{\partial x}{\partial \eta}(0,0) \\ \frac{\partial y}{\partial \xi}(0,0) & \frac{\partial y}{\partial \eta}(0,0) \end{pmatrix}$

(3-60) $E = \begin{pmatrix} \eta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \xi \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \\ \eta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} & \eta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \end{pmatrix}$

On a $\sup_{(\xi, \eta) \in \hat{K}} \|E\| \leq \hat{c}_1 z_K$, $\sup_{(\xi, \eta) \in \hat{K}} \|DE\| \leq \hat{c}_2 z_K$.

Donc :

$$\begin{aligned} |F_K|_{1,\infty,\hat{K}} &= \sup_{(\xi,\eta) \in K} \|D F_K\| \leq \|B\| + \sup_{(\xi,\eta) \in K} \|E\| \\ &\leq \hat{c}_3 (h_K + z_K) \leq \hat{c}_4 h_K \end{aligned}$$

$$|F_K|_{2,\infty,\hat{K}} = \sup_{(\xi,\eta) \in \hat{K}} \|D^2 F_K\| = \sup_{(\xi,\eta) \in \hat{K}} \|D^2 E\| \leq \hat{c}_5 z_K.$$

La matrice B est inversible, on peut donc écrire :

$$D F_K = B (I + B^{-1} E).$$

On sait que $\|B^{-1}\| \leq \frac{c_1}{h_K}$. Si $\frac{z_K}{h_K}$ est assez petit devant 1

(par exemple $\hat{c}_1 \cdot c_1 \frac{z_K}{h_K} \leq c_2 < 1$), alors l'opérateur $I + B^{-1} E$ est inversible,

de norme :

$$(3-61) \quad \|(I + B^{-1} E)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - c_2}.$$

On a :

$$D F_K^{-1}(x) = (D F_K(\xi, \eta))^{-1} = (I + B^{-1} E)^{-1} B^{-1}$$

$$(3-62) \quad |F_K^{-1}|_{1,\infty,K} = \sup_{(\xi,\eta) \in K} \|D F_K^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - c_2} \frac{c_1}{h_K} \leq \frac{c}{h_K}.$$

Ensuite, nous savons (Ciarlet [6] pp. 270)

$$|F_K^{-1}|_{2,\infty,K} = \sup_{x \in K} \|D^2 F_K^{-1}(x)\| \leq |F|_{2,\infty,K} |F^{-1}|_{1,\infty,K}^3.$$

Donc :

$$(3-63) \quad |F_K^{-1}|_{2,\infty,K} \leq c \frac{z_K}{h_K^3}.$$

Conclusion :

Il résulte du théorème (3-1) que le problème (3-2) admet une solution unique.

4 - THEOREME DE MAJORATION D'ERREUR

Pour préparer l'obtention d'estimations de l'erreur, nous donnons dans le théorème suivant une majoration "abstraite" de l'erreur.

Théorème (3-2) :

Soit une famille de problèmes discrets (3-2) pour laquelle les formes bilinéaires $\tilde{a}_h(.,.)$ sont uniformément V_h -elliptiques, en ce sens qu'il existe une constante $\tilde{\alpha} > 0$ telle que :

$$(3-66) \quad \tilde{\alpha} \|v_h\|_h^2 \leq \tilde{a}_h(v_h, v_h) \quad \text{pour tout } v_h \in V_h.$$

Alors il existe une constante C indépendante de h telle que :

$$(3-67) \quad \|u - u_h\|_h \leq C \left\{ \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h \in V_h} \left| \frac{(f, w_h) - a_h(v_h, w_h)}{\|w_h\|_h} \right| \right. \\ \left. + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a_h(v_h, w_h) - \tilde{a}_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_h} + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|(f, w_h) - (f, w_h)_h|}{\|w_h\|_h} \right\}$$

où u est la solution du problème continu (1-8).

Nous rappelons ici la démonstration qui se trouve dans Ciarlet - Raviart [9], Strang [25].

Soit v_h un élément arbitraire dans V_h ; nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} \|u_h - v_h\|_h^2 &\leq \tilde{a}_h(u_h - v_h, u_h - v_h) \\ &\leq a_h(u - v_h, u_h - v_h) - a_h(u - v_h, u_h - v_h) + \tilde{a}_h(u_h - v_h, u_h - v_h) \\ &\leq a_h(u - v_h, u_h - v_h) + a_h(v_h, u_h - v_h) - \tilde{a}_h(v_h, u_h - v_h) \\ &\quad + \tilde{a}_h(u_h, u_h - v_h) - a_h(u, u_h - v_h) \\ &\leq a_h(u - v_h, u_h - v_h) + a_h(v_h, u_h - v_h) - \tilde{a}_h(v_h, u_h - v_h) \\ &\quad + \tilde{a}_h(u_h, u_h - v_h) - a_h(u, u_h - v_h) + (f, u_h - v_h) - (f, u_h - v_h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq a_h(u - v_h, u_h - v_h) + \{(f, u_h - v_h) - a_h(u, u_h - v_h)\} \\ &\quad + \{a_h(v_h, u_h - v_h) - \tilde{a}_h(v_h, u_h - v_h)\} \\ &\quad + \{\tilde{a}_h(u_h, u_h - v_h) - (f, u_h - v_h)\}. \end{aligned}$$

Le dernier terme n'est que $\{(f, u_h - v_h)_h - (f, u_h - v_h)\}$.

Soit $w_h = u_h - v_h$. D'après l'inégalité (3-66) et la continuité de $a_h(.,.)$ nous aurons :

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} \|u_h - v_h\|_h^2 &\leq \tilde{M} \|u - v_h\|_h \|w_h\|_h + |(f, w_h) - a_h(u, w_h)| \\ &\quad + |a_h(v_h, w_h) - \tilde{a}_h(v_h, w_h)| + |(f, w_h)_h - (f, w_h)| \end{aligned}$$

pour tout $v_h \in V_h$

ce qui donne encore :

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} \|u_h - v_h\|_h &\leq \tilde{M} \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h \in V_h} \left\{ \frac{|(f, w_h) - a_h(u, w_h)|}{\|w_h\|_h} \right. \\ &\quad \left. + \frac{|a_h(v_h, w_h) - \tilde{a}_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_h} + \frac{|(f, w_h)_h - (f, w_h)|}{\|w_h\|_h} \right\} \end{aligned}$$

et on a encore l'inégalité triangulaire suivante :

$$\|u - u_h\|_h \leq \|u - v_h\|_h + \|u_h - v_h\|_h.$$

En combinant ces deux dernières inégalités, nous pouvons déduire :

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_h &\leq C \left\{ \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|(f, w_h) - a_h(u, w_h)|}{\|w_h\|_h} \right. \\ &\quad \left. + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a_h(v_h, w_h) - \tilde{a}_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_h} + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|(f, w_h)_h - (f, w_h)|}{\|w_h\|_h} \right\} \end{aligned}$$

où $C = \max \left(1 + \frac{\tilde{M}}{\tilde{\alpha}}, \frac{1}{\tilde{\alpha}} \right)$ est indépendante de h .

C. Q. F. D.

Remarque (3-4) :

L'estimation du premier terme du second membre de l'inégalité (3-67) est classique (cf. Ciarlet [4, 5]). Pour le second terme, i. e. le terme du Patch Test, son estimation est donnée par Lascaux-Lesaint [18], c'est l'inégalité (1-37) du chapitre 1, dans le cas du maillage d'Adini rectangulaire. Dans le cas du maillage déformé, ce terme a été estimé dans le chapitre 2. Pour donner la majoration générale de l'erreur, il ne reste qu'à estimer les deux derniers termes de consistance de (3-67).

- ESTIMATION DU TERME DE CONSISTANCE $\sup_{w_h \in V_h} \frac{|(f, w_h) - (f, w_h)_h|}{\|w_h\|_h}$

Nous allons le majorer dans deux cas suivants

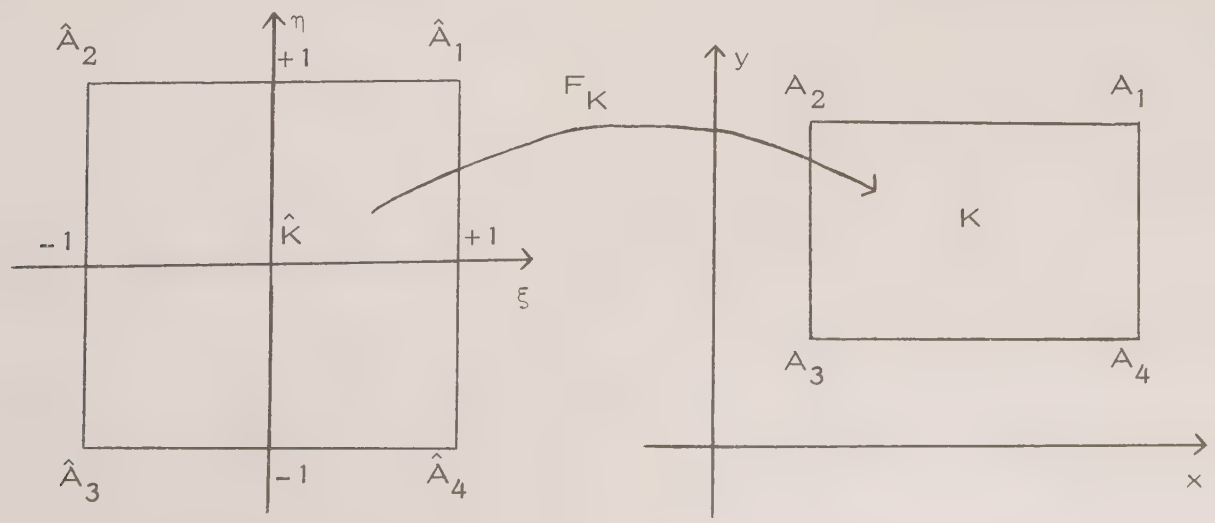
a) Premier cas :

Cas où la transformation F_K donnée par (1-15) est affine.

H_1) : On suppose le domaine Ω polygonal triangulé en rectangle d'Adini. La triangulation est supposée régulière (côtés parallèles aux axes de coordonnées).

H_2) : On suppose que la formule est exacte pour les polynômes de $Q_3(\hat{K})$, en particulier celle utilisée pour définir le problème approché (3-2).

A une fonction φ définie sur K , nous associons une fonction $\hat{\varphi}$ définie sur $\hat{K}$ = carré de référence par $\hat{\varphi} = \varphi \circ F_K$, et inversement $\varphi = \hat{\varphi} \circ F_K^{-1}$.



F_K est de la forme $F_K(\hat{x}) = B_K \hat{x} + b_K \in \mathbb{R}^2$ (voir (3-26)) ; on obtient
 $\int_K \varphi(x, y) dx dy = \det B_K \int_K \hat{\varphi}(\xi, \eta) d\xi d\eta$ les formules de quadrature
 données par (3-6) et (3-7)

$$\int_K \hat{\varphi}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{\ell=1}^L \hat{w}_\ell \hat{\varphi}(\hat{b}_\ell)$$

$$\int_K \varphi(x, y) dx dy = \sum_{\ell=1}^L w_{\ell, K} \varphi(b_{\ell, K})$$

$$\text{avec } w_{\ell, K} = \hat{w}_\ell \det B_K ; b_{\ell, K} = F_K(\hat{b}_\ell) \quad 1 \leq \ell \leq L.$$

Parallèlement, nous définissons les fonctionnelles d'erreurs

$$(3-68) \quad E_K(\varphi) = \int_K \varphi(x, y) dx dy - \sum_{\ell=1}^L w_{\ell, K} \varphi(b_{\ell, K})$$

$$(3-69) \quad \hat{E}(\hat{\varphi}) = \int_K \hat{\varphi}(\xi, \eta) d\xi d\eta - \sum_{\ell=1}^L \hat{w}_\ell \hat{\varphi}(\hat{b}_\ell)$$

de telle sorte que :

$$(3-70) \quad E_K(\varphi) = \det B_K \hat{E}(\hat{\varphi}).$$

L'expression $(f, w_h) - (f, w_h)_h$ s'écrit alors :

$$(3-71) \quad (f, w_h) - (f, w_h)_h = E(f, w_h) = \sum_{K \in \tau_h} E_K(f, w_h)$$

$$|(f, w_h) - (f, w_h)_h| \leq \sum_{K \in \tau_h} |E_K(f, w_h)|.$$

D'après l'expression (5-70), la majoration de $E_K(f, w_h)$ revient à la majoration $\hat{E}(\hat{f}, \hat{w}_h)$.

Théorème (3-3) :

Nous supposons les hypothèses (H_1) et (H_2) vérifiées avec les notations précédentes. Alors il existe une constante c indépendante de h telle que :

$$(3-72) \quad \sup_{w_h \in V_h} \frac{|(f, w_h) - (f, w_h)_h|}{\|w_h\|_h} \leq c h (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} |f|_{1, q, \Omega}.$$

Démonstration :

Etape 1 : estimation sur le carré de référence $\hat{K}$.

Soit l'espace $W^{1,q}(\hat{K})$ pour $q > 2$, d'après les injections de Sobolev

$$(3-73) \quad W^{1,q}(\hat{K}) \hookrightarrow C^0(\hat{K}), \text{ l'expression}$$

$$\hat{E}(\hat{f} \hat{w}_h) = \int_{\hat{K}} (\hat{f} \hat{w}_h) d\xi d\eta - \sum_{\ell=1}^L \hat{w}_\ell (\hat{f} \hat{w}_h) (\hat{b}_\ell)$$

est majorée par,

$$|\hat{E}(\hat{f} \hat{w}_h)| \leq \left| \int_{\hat{K}} (\hat{f} \hat{w}_h) d\xi d\eta - \sum_{\ell=1}^L \hat{w}_\ell (\hat{f} \hat{w}_h) (\hat{b}_\ell) \right|$$

$$\leq \hat{c} \|\hat{f} \hat{w}_h\|_{0,\infty,\hat{K}} \leq \hat{c} \|\hat{f}\|_{0,\infty,\hat{K}} \|\hat{w}_h\|_{0,\infty,\hat{K}}$$

en désignant par $\hat{c}$ des constantes successives qui ne dépendent que du carré de référence.

Etant donné que $\|\hat{f}\|_{0,\infty,\hat{K}} \leq \hat{c} \|\hat{f}\|_{1,q,\hat{K}}$ d'après l'inclusion (3-73)

et comme toutes les normes sont équivalentes sur l'espace de dimension finie $\hat{P}_K$, $\|\hat{w}_h\|_{0,\infty,\hat{K}}$ est équivalente à $|\hat{w}_h|_{0,\hat{K}}$.

On en déduit :

$$(3-74) \quad |\hat{E}(\hat{f} \hat{w}_h)| \leq \hat{c} \|\hat{f}\|_{1,q,\hat{K}} |\hat{w}_h|_{0,\hat{K}}.$$

Ainsi, pour tout $\hat{w}_h \in \hat{P}_K$, la forme linéaire

$$\begin{aligned} W^{1,q}(\hat{K}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \hat{f} &\longrightarrow \hat{E}(\hat{f} \hat{w}_h) \end{aligned}$$

est continue avec une norme $\leq \hat{c} |\hat{w}_h|_{0,\hat{K}}$ et elle s'annule sur l'espace P_0 i. e. $\hat{E}(\hat{f} \hat{w}_h) = 0$ pour tout $\hat{f} \in P_0$ et pour tout $\hat{w}_h \in \hat{P}_K$ (Hypothèse H_2).

Par suite, en utilisant le lemme de Bramble-Hilbert

(cf. Ciarlet [4], n°8, th. 3), il existe une constante $\hat{c}$ telle que pour tout

$\hat{f} \in W^{1,q}(\hat{K})$ et $\hat{w}_h \in \hat{P}_K$

$$(3-75) \quad |\hat{E}(\hat{f} \hat{w}_h)| \leq \hat{c} \|\hat{f}\|_{1,q,\hat{K}} |\hat{w}_h|_{0,\hat{K}}.$$

Etape 2 : Estimation sur le carré du maillage K.

De l'estimation d'erreur (3-75) sur le carré de référence, nous allons déduire l'estimation d'erreur sur K en utilisant les inégalités suivantes (cf. Ciarlet [4], th. 3, n°6) et qui se trouve dans le chapitre 0 lemme (0-5)

$$(3-76) \quad |\hat{f}|_{1,q,\hat{K}} \leq \hat{c} h_K (\det B_K)^{-\frac{1}{q}} |f|_{1,q,\hat{K}}$$

$$(3-77) \quad |\hat{w}_h|_{0,\hat{K}} \leq \hat{c} (\det B_K)^{-\frac{1}{2}} |w_h|_{0,K}.$$

En combinant ces inégalités avec les relations (3-70) et (3-75), il vient : pour tout $f \in W^{1,q}(K)$ et $w_h \in P_K$, il existe une constante $\hat{c}$ indépendante de $K \in \tau_h$ et de h telle que :

$$(3-78) \quad |E_K(f w_h)| \leq c h_K (\det B_K)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} |f|_{1,q,K} |w_h|_{0,K}.$$

Nous savons de plus que :

$$E(f w_h) = \sum_{K \in \tau_h} E_K(f w_h)$$

$$\begin{aligned} |E(f w_h)| &\leq \sum_{K \in \tau_h} |E_K(f w_h)| \\ &\leq \hat{c} \sum_{K \in \tau_h} (h_K (\det B_K)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} |f|_{1,q,K} |w_h|_{0,K}). \end{aligned}$$

Soit $h = \max_{K \in \tau_h} h_K$ alors :

$$(3-79) \quad |E(f w_h)| \leq \hat{c} h \sum_{K \in \tau_h} (\det B_K)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} |f|_{1,q,K} |w_h|_{0,K}.$$

Pour cette dernière inégalité, nous allons utiliser l'inégalité :

$$(3-80) \quad \sum_{K \in \tau_h} |a_K b_K c_K| \leq \left(\sum_{K \in \tau_h} |a_K|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\sum_{K \in \tau_h} |b_K|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\sum_{K \in \tau_h} |c_K|^\gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

valable pour tous les nombres réels $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$, $\gamma \geq 1$ satisfaisant :

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1.$$

On prend ici : $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$, $\beta = q$, $\gamma = 2$. Nous aurons alors :

$$\sum_{K \in \tau_h} |E_K(f w_h)| \leq \hat{c} h \left(\sum_{K \in \tau_h} \det B_K \right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \left(\sum_{K \in \tau_h} |f|_{1,q,K}^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ \cdot \left(\sum_{K \in \tau_h} |w_h|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Du fait que $\det B_K = \frac{\text{mes } K}{\text{mes } \hat{K}}$ on aura alors

$$(3-81) \quad \sum_{K \in \tau_h} |E_K(f w_h)| \leq \hat{c} h (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} |f|_{1,q,\Omega} |w_h|_{0,\Omega}.$$

Nous savons : $|w_h|_{0,\Omega} \leq c \|w_h\|_h$ lemme (2-2) ; on conclut que :

$$|(f, w_h) - (f, w_h)_h| \leq c h (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} |f|_{1,q,\Omega} \|w_h\|_h$$

(3-82) et

pour tout $w_h \in V_h$

$$\sup_{w_h \in V_h} \frac{|(f, w_h) - (f, w_h)_h|}{\|w_h\|_h} \leq c h (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} |f|_{1,q,\Omega}$$

ce qui démontre le théorème (3-3).

Remarque (3-5) :

Toujours dans ce cas affine, on pourra donner une autre estimation du terme de consistance.

$$(3-83) \quad \hat{E}(\hat{f} \hat{w}_h) = \hat{E}(\hat{f} [\hat{w}_h - \hat{\pi}_1 \hat{w}_h]) + \hat{E}(\hat{f} \hat{\pi}_1 \hat{w}_h)$$

où $\hat{\pi}_1$ désigne l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\hat{K})$ sur le sous-espace $P_1(\hat{K})$.

Etape 1 : Estimation de $\hat{E}(\hat{f}[\hat{w}_h - \hat{\pi}_1 \hat{w}_h])$

Pour tout $\hat{\psi} \in W^{1,q}(\hat{K})$, $q > 2$, nous avons :

$$|\hat{E}(\hat{\psi})| \leq \hat{c} \|\hat{\psi}\|_{0,\infty,\hat{K}} \leq \hat{c} \|\hat{\psi}\|_{1,q,\hat{K}}.$$

Soit maintenant $\hat{\psi} = \hat{f}[\hat{w}_h - \hat{\pi}_1 \hat{w}_h]$ on aura :

$$|\hat{E}(\hat{f}[\hat{w}_h - \hat{\pi}_1 \hat{w}_h])| \leq \hat{c} \|\hat{f}\|_{1,q,\hat{K}} \|\hat{w}_h - \hat{\pi}_1 \hat{w}_h\|_{0,\hat{K}}.$$

Du fait que $W^{1,q}(\hat{K}) \hookrightarrow C^0(\hat{K})$, $q > 2$ et l'équivalence des normes sur l'espace de dimension finie, la forme linéaire $\hat{f} \in W^{1,q}(\hat{K}) \rightarrow \hat{E}(\hat{f}[\hat{w}_h - \hat{\pi}_1 \hat{w}_h]) \equiv 0$ pour tout $\hat{f} \in P_0$, (Hypothèse H_2).

Donc, avec le lemme de Bramble-Hilbert (cf. Ciarlet [4], n°8, th. 3)

$$(3-84) \quad |\hat{E}(\hat{f}[\hat{w}_h - \hat{\pi}_1 \hat{w}_h])| \leq \hat{c} \|\hat{f}\|_{1,q,\hat{K}} \|\hat{w}_h - \hat{\pi}_1 \hat{w}_h\|_{0,\hat{K}}.$$

Comme l'opérateur $\hat{\pi}_1$ laisse invariant l'espace $P_1(\hat{K})$, on aura (cf. Ciarlet [4], n°6, th. 2) :

$$\|\hat{w}_h - \hat{\pi}_1 \hat{w}_h\|_{0,\hat{K}} \leq \hat{c} \|\hat{w}_h\|_{2,\hat{K}}.$$

Nous utilisons le théorème 3 de Ciarlet [4], n°6 et qui se trouve dans le chapitre 0.

$$\|\hat{w}\|_{2,\hat{K}} \leq \hat{c} h_K^2 (\det B_K)^{-\frac{1}{2}} \|w_h\|_{2,K}$$

$$\|\hat{f}\|_{1,q,\hat{K}} \leq \hat{c} h_K (\det B_K)^{-\frac{1}{q}} \|f\|_{1,q,K}$$

où $\hat{c}$ est une constante indépendante de K et de h_K .

En combinant ces inégalités, nous aurons :

$$|\hat{E}(\hat{f}[\hat{w}_h - \hat{\pi}_1 \hat{w}_h])| \leq \hat{c} h_K^3 (\det B_K)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \|f\|_{1,q,K} \|w_h\|_{2,K}$$

d'où il résulte que :

$$(3-85) \quad |E_K(f[w_h - \pi_1 w_h])| \leq \hat{c} h_K^3 (\det B_K)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \|f\|_{1,q,K} \|w_h\|_{2,K}.$$

Etape 2 : Estimation de $\hat{E}(\hat{f}\hat{\pi}_1 \hat{w}_h)$

L'hypothèse H_2 entraîne, en particulier, que $\hat{E}(\hat{\psi}) = 0$ pour tout $\hat{\psi} \in \hat{P}_2$, d'où avec le lemme de Bramble-Hilbert (cf. Ciarlet [4], n°8, th. 3)

$$\forall \hat{\psi} \in W^{3,q}(\hat{K}) \quad |\hat{E}(\hat{\psi})| \leq \hat{c} |\hat{\psi}|_{3,q,\hat{K}}.$$

Soit maintenant $\hat{\psi} = \hat{f}\hat{\pi}_1 \hat{w}_h$ avec $\hat{f} \in W^{3,q}(\hat{K})$ $\hat{w}_h \in \hat{P}_K$. En utilisant la formule de Leibniz et en remarquant que toutes les semi-normes $|\hat{\pi} \hat{p}|_{\ell,\infty,\hat{K}}$ sont nulles pour $\ell \geq 2$ ($\hat{\pi}_1 \hat{p} \in \hat{P}_1$), on obtient :

$$|\hat{f}\hat{\pi}_1 \hat{w}_h|_{3,q,\hat{K}} \leq \hat{c} \sum_{k=0}^3 |\hat{f}|_{3-k,q,\hat{K}} |\hat{\pi}_1 \hat{w}_h|_{k,\infty,\hat{K}}$$

ou encore :

$$(3-86) \quad |\hat{f}\hat{\pi}_1 \hat{w}_h|_{3,q,\hat{K}} \leq \hat{c} \sum_{k=0}^3 |\hat{f}|_{3-k,q,\hat{K}} |\hat{\pi}_1 \hat{w}_h|_{0,\infty,\hat{K}}$$

ce qui donne :

$$|\hat{f}\hat{\pi}_1 \hat{w}_h|_{3,q,\hat{K}} \leq \hat{c} \|\hat{f}\|_{3,q,\hat{K}} |\hat{\pi}_1 \hat{w}_h|_{0,\hat{K}}$$

d'où :

$$|\hat{E}(\hat{f}\hat{\pi}_1 \hat{w}_h)| \leq \hat{c} \|\hat{f}\|_{3,q,\hat{K}} |\hat{\pi}_1 \hat{w}_h|_{0,\hat{K}}.$$

Comme $\hat{\pi}_1$ est un opérateur de projection en norme $|\cdot|_{0,\hat{K}}$ nous avons :

$$(3-84) \quad |\hat{\pi}_1 \hat{w}_h|_{0,\hat{K}} \leq \hat{c} |\hat{w}_h|_{0,\hat{K}}$$

toujours le théorème 3 (Ciarlet [4])

$$|\hat{E}(\hat{f}\hat{\pi}_1 \hat{w}_h)| \leq \hat{c} h_K^3 \|\hat{f}\|_{3,q,K} (\det B_K)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} |w_h|_{0,K}$$

ce qui donne :

$$|E_K(f\pi_1 w_h)| \leq \hat{c} h_K^3 \|f\|_{3,q,K} (\det B_K)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} |w_h|_{0,K}.$$

En sommant sur tous les K du maillage

$$(3-87) \quad |E(f \pi_1 w_h)| \leq c h^3 \|f\|_{3,q,\Omega} (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} |w_h|_{0,\Omega}$$

or, d'après le lemme (2-2), $|w|_{0,\Omega} \leq c \|w_h\|_h$

d'où il résulte :

$$|E(f \pi_1 w_h)| \leq c h^3 \|f\|_{3,q,\Omega} (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \|w_h\|_h.$$

Mais, dans l'étape 1, on avait l'estimation :

$$|E_K(f [w_h - \pi_1 w_h])| \leq \hat{c} h_K^3 (\det B_K)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} |f|_{1,q,K} |w_h|_{2,K}.$$

En sommant sur tous les K du maillage

$$\begin{aligned} |E(f [w_h - \pi_1 w_h])| &\leq \hat{c} h^3 (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} |f|_{1,q,\Omega} \|w_h\|_h \\ &\leq \hat{c} h^3 (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \|f\|_{3,q,\Omega} \|w_h\|_h \end{aligned}$$

d'où, en combinant l'estimation de l'étape 1 et de l'étape 2, nous aurons :

$$|E(f w_h)| \leq c h^3 (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \|f\|_{3,q,\Omega} \|w_h\|_h$$

ce qui donne :

$$(3-88) \quad \sup_{w_h \in V_h} \frac{|(f, w_h)_h - (f, w_h)|}{\|w_h\|_h} \leq \hat{c} h^3 (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \|f\|_{3,q,\Omega}.$$

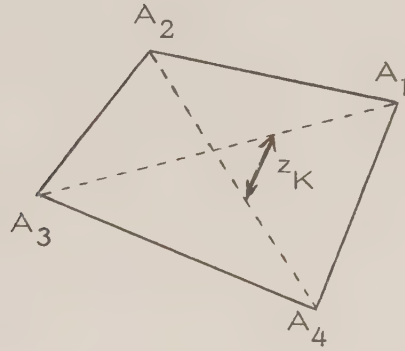
b) Deuxième cas :

Cas où la transformation F_K donnée par (1-15) est non affine,

i. e. le cas du maillage déformé.

H_3) : On suppose le domaine Ω polygonal triangulé en quadrilatères convexes de diamètre $\leq h_K$, la triangulation est supposée régulière.

H_4) : Pour tout quadrilatère $K \in (\tau_h)_h$, on suppose zh^{-2} petit devant 1



Comme dans le premier cas, à la fonction Φ définie sur K , nous associons la fonction $\hat{\Phi}$ définie sur $\hat{K}$ carré de référence. ($\hat{\Phi} = \Phi \circ F_K$ et inversement $\Phi = \hat{\Phi} \circ F_K^{-1}$).

L'expression (1-56) définit la transformation F_K

$$F_K : (\xi, \eta) \in \hat{K} \longrightarrow F_K(\xi, \eta) = (x, y) \in K$$

$$\text{où } \begin{cases} x = a + b\xi + c\eta + d\xi\eta \\ y = \alpha + \beta\xi + \gamma\eta + \delta\xi\eta \end{cases}$$

de Jacobien $J_{F_K}(\xi, \eta)$ donné par (1-59)

$$J_{F_K}(\xi, \eta) = (b\gamma - c\beta) + (b\delta - \beta d)\xi + (\gamma d - \delta c)\eta.$$

La formule de quadrature sur le carré de référence $\hat{K}$ sera encore :

$$(3-89) \quad \int_{\hat{K}} \hat{\Phi}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{\ell=1}^L \hat{\omega}_{\ell} \hat{\Phi}(\hat{b}_{\ell}).$$

Ainsi (3-89) induit la formule de quadrature suivante sur le quadrilatère convexe K

$$(3-90) \quad \int_K \Phi(x, y) dx dy = \sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell, K} \Phi(b_{\ell, K})$$

avec :

$$(3-91) \quad \begin{cases} \omega_{\ell, K} = \hat{w}_{\ell} J_{F_K}(\hat{b}_{\ell}) \\ b_{\ell, K} = F_K(\hat{b}_{\ell}). \end{cases}$$

Parallèlement, nous définissons les fonctionnelles d'erreurs :

$$(3-92) \quad E_K(\Phi) = \int_K \Phi(x, y) dx dy - \sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell, K} \Phi(b_{\ell, K})$$

$$(3-93) \quad \hat{E}(\hat{\Phi}) = \int_K \hat{\Phi}(\xi, \eta) d\xi d\eta - \sum_{\ell=1}^L \hat{w}_{\ell} \hat{\Phi}(\hat{b}_{\ell})$$

de telle sorte que :

$$(3-94) \quad E_K(\Phi) = \hat{E}(\hat{\Phi} J_{F_K})$$

$$(3-95) \quad E(\Phi) = \sum_{K \in \tau_h} E_K(\Phi).$$

L'expression $(f, w_h)_h - (f, w_h)$ s'écrit :

$$(f, w_h)_h - (f, w_h) = E(f w_h) = \sum_{K \in \tau_h} E_K(f w_h) = \sum_{K \in \tau_h} \hat{E}(\hat{f} \hat{w}_h J_{F_K}).$$

Théorème (3-4) :

Nous supposons les hypothèses (H_2) , (H_3) , (H_4) vérifiées avec les notations précédentes.

Alors, il existe une constante c indépendante de h telle que :

$$(3-96) \quad \sup_{w_h \in V_h} \frac{|(f, w_h)_h - (f, w_h)|}{\|w_h\|_h} \leq c \left(\inf_{F_K} J_{F_K}(\xi, \eta) \right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \left(h \|f\|_{1, q, \Omega} + z h^{-1} \|f\|_{0, q, \Omega} \right)$$

Etape 1 : Estimation sur le carré de référence

L'espace de Sobolev $W^{1, q}(\hat{K})$ pour $q > 2$ s'injecte continuellement dans $C^0(\hat{K})$ i. e. $W^{1, q}(\hat{\Omega}) \hookrightarrow C^0(\hat{K})$

$$\begin{aligned}
 |\hat{E}(\hat{f} \hat{w}_h J_{F_K})| &\leq \int_{\hat{K}} (\hat{f} \hat{w}_h J_{F_K}) d\xi d\eta - \sum_{\ell=1}^L \hat{w}_\ell (\hat{f} \hat{w}_h J_{F_K}) (\hat{b}_\ell) \\
 &\leq \hat{c} \|\hat{f} \hat{w}_h J_{F_K}\|_{0, \infty, \hat{K}} \\
 &\leq \hat{c} \|\hat{f} J_{F_K}\|_{0, \infty, \hat{K}} \|\hat{w}_h\|_{0, \hat{K}}.
 \end{aligned}$$

En désignant par $\hat{c}$ des constantes successives qui ne dépendent que du carré de référence d'après l'inclusion $W^{1, q}(\hat{K}) \hookrightarrow C^0(\hat{K})$ et comme toutes les normes sont équivalentes sur l'espace de dimension finie $\hat{P}_K$; $\|\hat{w}_h\|_{0, \hat{K}}$ est équivalente à $\|\hat{w}_h\|_{0, \infty, \hat{K}}$.

On en déduit :

$$(3-97) \quad |\hat{E}(\hat{f} \hat{w}_h J_{F_K})| \leq \hat{c} \|\hat{f} J_{F_K}\|_{1, q, \hat{K}} \|\hat{w}_h\|_{0, \hat{K}}.$$

Ainsi, pour tout $\hat{w}_h \in \hat{P}_K$, la forme linéaire

$$\begin{aligned}
 (3-98) \quad W^{1, q}(\hat{K}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 \hat{g} &\longrightarrow \hat{E}(\hat{g} \hat{w}_h) = \int_{\hat{K}} \hat{g} \hat{w}_h - \sum_{\ell=1}^L \hat{w}_\ell (\hat{g} \hat{w}_h) (\hat{b}_\ell) \\
 &= \frac{1}{\inf_{(\xi, \eta) \in \hat{K}} J_{F_K}(\xi, \eta)} \left[\int_{\hat{K}} \hat{f} J_{F_K} \hat{w}_h - \sum_{\ell=1}^L \hat{w}_\ell (\hat{f} J_{F_K} \hat{w}_h) (\hat{b}_\ell) \right] \\
 \text{où } \hat{g} &= \hat{f} \frac{J_{F_K}}{\inf_{(\xi, \eta) \in \hat{K}} J_{F_K}(\xi, \eta)} \quad \text{et} \quad \hat{f} \in W^{1, q}(\hat{K})
 \end{aligned}$$

est continue et de norme $\leq \hat{c} \|\hat{w}\|_{0, \hat{K}}$ car :

$$|\hat{E}(\hat{g}, \hat{w}_h)| \leq \hat{c} \|\hat{g}\|_{1, q, \hat{K}} \|\hat{w}_h\|_{0, \hat{K}} \quad (\text{expression (3-97)}).$$

De plus, elle s'annule sur l'espace P_0 , i. e. $\hat{E}(\hat{g} \hat{w}_h) = 0$ pour tout $\hat{g} \in P_0$ et pour tout $\hat{w}_h \in \hat{P}_K$ (Hypothèse H_2).

Par suite, en utilisant le lemme de Bramble-Hilbert (cf. Ciarlet [4], n°8, th.3), il existe une constante $\hat{c}$ telle que, pour tout $\hat{g} \in W^{1,q}(\hat{K})$ et pour tout $\hat{w}_h \in \hat{P}_K$

$$(3-99) \quad |\hat{E}(\hat{g} - \hat{w}_h)| \leq \hat{c} |\hat{g}|_{1,q,\hat{K}} |\hat{w}_h|_{0,\hat{K}}.$$

Lemme (3-4) :

$\hat{g}$ étant donnée par (3-98) et J_{F_K} le Jacobien de la transformation bijective F_K .

Alors, il existe une constante $\hat{c}$ telle que :

$$(3-100) \quad |\hat{g}|_{1,q,\hat{K}} \leq \hat{c} (|\hat{f}|_{1,q,\hat{K}} + z_K h_K^{-1} |f|_{0,q,\hat{K}}) \quad \text{pour tout } \hat{f} \in W^{1,q}(\hat{K}).$$

Démonstration :

Nous avons :

$$|\hat{g}|_{1,q,\hat{K}} = \left| \hat{f} \frac{J_{F_K}(\xi, \eta)}{\inf_{-1 \leq \xi, \eta \leq 1} J_{F_K}(\xi, \eta)} \right|_{1,q,\hat{K}}.$$

Pour simplifier la notation, nous poserons :

$$\inf_{-1 \leq \xi, \eta \leq 1} J_{F_K}(\xi, \eta) = \inf J_{F_K}(\xi, \eta), \quad \max_{-1 \leq \xi, \eta \leq 1} J_{F_K}(\xi, \eta) = \max J_{F_K}(\xi, \eta)$$

$$\begin{aligned} \left| \hat{f} \frac{J_{F_K}(\xi, \eta)}{\inf J_{F_K}(\xi, \eta)} \right|_{1,q,\hat{K}} &\leq \left| D_{\xi} \hat{f} \frac{J_{F_K}(\xi, \eta)}{\inf J_{F_K}(\xi, \eta)} \right|_{0,q,\hat{K}} + \left| \hat{f} \frac{D_{\xi} J_{F_K}(\xi, \eta)}{\inf J_{F_K}(\xi, \eta)} \right|_{0,q,\hat{K}} \\ &\quad + \left| D_{\eta} \hat{f} \frac{J_{F_K}(\xi, \eta)}{\inf J_{F_K}(\xi, \eta)} \right|_{0,q,\hat{K}} + \left| \hat{f} \frac{D_{\eta} J_{F_K}(\xi, \eta)}{\inf J_{F_K}(\xi, \eta)} \right|_{0,q,\hat{K}} \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$(3-101) \quad \begin{aligned} |\hat{g}|_{1,q,\hat{K}} \leq & \frac{\max J_{F_K}(\xi,\eta)}{\inf J_{F_K}(\xi,\eta)} |D_\xi \hat{f}|_{0,q,\hat{K}} + \frac{\max |D_\xi J_{F_K}(\xi,\eta)|}{\inf J_{F_K}(\xi,\eta)} |\hat{f}|_{0,q,\hat{K}} \\ & + \frac{\max J_{F_K}(\xi,\eta)}{\inf J_{F_K}(\xi,\eta)} |D_\eta \hat{f}|_{0,q,\hat{K}} + \frac{\max |D_\eta J_{F_K}(\xi,\eta)|}{\inf J_{F_K}(\xi,\eta)} |\hat{f}|_{0,q,\hat{K}}. \end{aligned}$$

Essayons de majorer le terme $\frac{\max |D_\xi J_{F_K}(\xi,\eta)|}{\inf J_{F_K}(\xi,\eta)}$.

Nous reprenons l'expression (3-87) de $J_{F_K}(\xi,\eta)$ avec les notations

$$(3-102) \quad \begin{aligned} J_{F_K}(\xi,\eta) &= (b\gamma - c\beta) + (b\delta - \beta d)\xi + (\gamma d - \delta c)\eta \\ \rightarrow \text{grad } J_{F_K} &= \begin{pmatrix} D_\xi J_{F_K}(\xi,\eta) \\ D_\eta J_{F_K}(\xi,\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\delta - \beta d \\ \gamma d - \delta c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous utiliserons des résultats connus (Ciarlet - Raviart [9]).

Il existe des constantes $\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3, \hat{c}_4 > 0$ telles que :

$$(3-103) \quad \cdot \frac{\max J_{F_K}(\xi,\eta)}{\inf J_{F_K}(\xi,\eta)} \leq \hat{c}_1$$

$$(3-104) \quad \cdot \inf J_{F_K}(\xi,\eta) \geq \hat{c}_2 h_K^2$$

$$(3-105) \quad \cdot b, c, \beta, \gamma \leq \hat{c}_3 h_K$$

$$(3-106) \quad \cdot \delta, d \leq \hat{c}_4 z_K.$$

L'application de ces résultats donne :

$$\max |D_\xi J_{F_K}(\xi,\eta)| = \sup (|b\delta - \beta d|, |\gamma d - \delta c|),$$

c'est-à-dire que :

$$(3-107) \quad \max_{-1 \leq \xi, \eta \leq 1} \left| D_{\xi} J_{F_K}(\xi, \eta) \right| \leq \hat{c}_5 h_K z_K$$

$$(3-108) \quad \frac{\max \left| D_{\xi} J_{F_K}(\xi, \eta) \right|}{\inf J_{F_K}(\xi, \eta)} \leq \hat{c}_6 z_K h_K^{-1}.$$

On majore de la même manière :

$$(3-109) \quad \frac{\max \left| D_{\eta} J_{F_K}(\xi, \eta) \right|}{\inf J_{F_K}(\xi, \eta)} \leq \hat{c}_7 z_K h_K^{-1}.$$

Nous combinons les relations (3-101) à (3-109). Nous aurons :

$$(3-110) \quad |\hat{g}|_{1, q, \hat{K}} \leq \hat{c} \left(|\hat{f}|_{1, q, \hat{K}} + h_K^{-1} z_K |\hat{f}|_{0, q, \hat{K}} \right)$$

ce qui démontre bien le lemme (3-4).

Etape 2 : Estimation sur le quadrilatère convexe K du maillage

D'après les lemmes (0-5) et (0-6), nous tirons :

$$\bullet \quad |\hat{f}|_{1, q, \hat{K}} \leq c_1 h_K \left(\inf J_{F_K}(\xi, \eta) \right)^{-\frac{1}{q}} |f|_{1, q, K}$$

$$\bullet \quad |\hat{f}|_{0, q, \hat{K}} \leq c_2 \left(\inf J_{F_K}(\xi, \eta) \right)^{-\frac{1}{q}} |f|_{0, q, K}$$

$$\bullet \quad |\hat{w}_h|_{0, \hat{K}} \leq c_3 \left(\inf J_{F_K}(\xi, \eta) \right)^{-\frac{1}{2}} |w_h|_{0, K},$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} |\hat{g}|_{1, q, \hat{K}} &\leq \hat{c} h_K \left(\inf J_{F_K}(\xi, \eta) \right)^{-\frac{1}{q}} |f|_{1, q, K} \\ &\quad + \hat{c} z_K h_K^{-1} \left(\inf J_{F_K}(\xi, \eta) \right)^{-\frac{1}{q}} |f|_{0, q, K}. \end{aligned}$$

D'où, pour tout $\hat{f} \in W^{1,q}(\hat{K})$ i. e. $\hat{g} \in W^{1,q}(\hat{K})$ et pour tout $\hat{w}_h \in \hat{P}_K$

$$|\hat{E}(\hat{g} \hat{w}_h)| \leq \hat{c} [\text{Inf } J_{F_K}(\xi, \eta)]^{-\frac{1}{q}} [h_K |f|_{1,q,K} + h_K^{-1} z_K |f|_{0,q,K}] \\ \cdot [\text{Inf } J_{F_K}(\xi, \eta)]^{-\frac{1}{2}} |w_h|_{0,K}$$

$$|\hat{E}(\hat{g} \hat{w}_h)| \leq \hat{c} [\text{Inf } J_{F_K}(\xi, \eta)]^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} [h_K |f|_{1,q,K} + h_K^{-1} z_K |f|_{0,q,K}] |w_h|_{0,K}$$

$$\text{On avait } \hat{E}(\hat{g} \hat{w}_h) = \frac{1}{\text{Inf } J_{F_K}(\xi, \eta)} \hat{E}(\hat{f} \hat{w}_h)$$

ce qui nous permet de conclure

$$(3-111) \quad |\hat{E}(\hat{f} \hat{w}_h)| \leq \hat{c} [\text{Inf } J_{F_K}(\xi, \eta)]^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} [h_K |f|_{1,q,K} + h_K^{-1} z_K |f|_{0,q,K}] |w_h|_{0,K}$$

Nous faisons la sommation sur tous les quadrilatères convexes du maillage ; nous aurons :

$$|E(f w_h)| \leq \hat{c} [\text{Inf } J_{F_K}(\xi, \eta)]^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} [h |f|_{1,q,\Omega} + z h^{-1} |f|_{0,q,\Omega}] |w_h|_{0,\Omega}.$$

$$|w_h|_{0,\Omega} \leq \|w_h\|_{1,\Omega} \text{ implique :}$$

$$(3-112) \quad |E(f w_h)| \leq \hat{c} [\text{Inf } J_{F_K}(\xi, \eta)]^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} [h |f|_{1,q,\Omega} + z h^{-1} |f|_{0,q,\Omega}] \|w_h\|_{1,\Omega}$$

pour tout $f \in W^{1,q}(K)$, où $z = \max_K z_K$.

L'application du lemme (2-1) i. e. $\|w_h\|_{1,\Omega} \leq c \|w_h\|_h$ permet de majorer alors (3-112) :

$$|E(f w_h)| \leq \hat{c} [\text{Inf } J_{F_K}(\xi, \eta)]^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} [h |f|_{1,q,\Omega} + z h^{-1} |f|_{0,q,\Omega}] \|w_h\|_h$$

pour tout $w_h \in V_h$.

Il résulte alors :

$$(3-113) \quad \sup_{w_h \in V_h} \frac{|(f, w_h) - (f, w_h)_h|}{\|w_h\|_h} \leq \hat{c} [\text{Inf}_{F_K} J_{F_K}(\xi, \eta)]^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} [h|f|_{1,q,\Omega} + zh^{-1}|f|_{0,q,\Omega}]$$

Remarque (3-6) :

Pour $z = 0$, c'est-à-dire dans le cas du maillage droit, on retrouve alors l'estimation (3-72).

$$6 - \text{ESTIMATION DU TERME DE CONSISTANCE} \quad \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a_h(v_h, w_h) - \tilde{a}_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_h}$$

Nous supposons les hypothèses suivantes :

H_1) : La triangulation $(\tau_h)_h$ du domaine Ω polygonal en quadrilatères convexes est supposée régulière.

H_2) : La quantité zh^{-2} est supposée petite devant 1.

H_3) : La formule de quadrature donnée sur le carré de référence intègre exactement $\hat{Q}_3(K)$; c'est celle utilisée pour définir le problème approché (3-2), par :

$$\int_K \hat{\varphi}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{\ell=1}^L \hat{\omega}_\ell \hat{\varphi}(\hat{b}_\ell) \quad \hat{\omega}_\ell > 0, \quad 1 \leq \ell \leq L$$

$$\hat{E}_K(\hat{\varphi}) = \int_K \hat{\varphi}(\xi, \eta) d\xi d\eta - \sum_{\ell=1}^L \hat{\omega}_\ell \hat{\varphi}(\hat{b}_\ell).$$

On a $\hat{P}_K \subset \hat{Q}_3(\hat{K})$ et pour tout $\hat{\varphi} \in \hat{P}_K$, $\hat{E}_K(\hat{\varphi}) \equiv 0$.

Nous considérons :

$$(3-114) \quad a_h(v_h, w_h) = \sum_{K \in \tau_h} \int_K \sum_{i,j=1}^2 \partial_{ii} v_h \partial_{jj} w_h dx dy$$

$$(3-115) \quad \tilde{a}_h(v_h, w_h) = \sum_{K \in \tau_h} \sum_{\ell=1}^L \sum_{i,j=1}^2 \omega_{\ell,K} (\partial_{ii} v_h \partial_{jj} w_h)(b_{\ell,K}).$$

Nous introduisons des fonctionnelles d'erreurs de quadrature

$$E_K(\varphi) = \int_K \varphi(x, y) dx dy - \sum_{\ell=1}^L \omega_{\ell,K} \varphi(b_{\ell,K})$$

$$\hat{E}_K(\hat{\varphi}) = \int_K \hat{\varphi}(\xi, \eta) d\xi d\eta - \sum_{\ell=1}^L \hat{\omega}_{\ell} \hat{\varphi}(\hat{b}_{\ell})$$

qui sont liées par la relation :

$$E_K(\varphi) = \hat{E}_K(\hat{\varphi} J_{F_K}) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \omega_{\ell,K} = J_{F_K} \hat{\omega}_{\ell} \\ b_{\ell,K} = F_K(\hat{b}_{\ell}). \end{cases}$$

Nous allons estimer $\hat{E}_K(J_{F_K} \widehat{\partial_{ii} v_h} \widehat{\partial_{jj} w_h}) \quad 1 \leq i, j \leq 2.$

a) Le Jacobien J_{F_K} de la transformation F_K est constant :

Dans ce cas, $J_{F_K} = \det B_K$, où $F_K = B_K \hat{x} + b \in \mathbb{R}^2$

et

$$(3-116) \quad E_K(\partial_{ii} v_h \partial_{jj} w_h) = \det B_K \hat{E}_K(\widehat{\partial_{ii} v_h} \widehat{\partial_{jj} w_h}) \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

Nous avons $\hat{P}_3 \subset \hat{P}_K \subset \hat{Q}_3(K).$

Pour tout $\hat{v}_h \in \hat{P}_K$ et $\hat{w}_h \in \hat{P}_K$ $\widehat{\partial_{ii} v_h}$ et $\widehat{\partial_{ii} w_h}$ appartiennent à $\hat{P}_2$, $i = 1, 2$ (voir (3-19)).

Théorème (3-5) :

Nous supposons les hypothèses (H_1) , (H_3) vérifiées. Alors, il existe une constante indépendante de h telle que :

$$(3-117) \quad \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a_h(v_h, w_h) - \tilde{a}_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_h} \leq ch (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} |v_h|_{3, \Omega}.$$

Démonstration :

Nous posons $\hat{p} = \widehat{\delta_{jj} w_h}$, $j = 1, 2$.

Pour un $\hat{p} \in \hat{P}_2$ et tout $\hat{\phi} \in W^{1, q}(\hat{K})$, $W^{1, q}(\hat{K}) \hookrightarrow C^0(\hat{K})$.

Pour $q > 2$, nous avons :

$$\begin{aligned} |\hat{E}_K(\hat{\phi} \hat{p})| &= \left| \int_{\hat{K}} \hat{\phi} \hat{p} \, d\hat{x} \, d\hat{y} - \sum_{\ell=1}^L \hat{w}_{\ell}(\hat{\phi} \hat{p})(\hat{b}_{\ell}) \right| \\ &\leq \hat{c} |\hat{\phi} \hat{p}|_{0, \infty, \hat{K}} \leq \hat{c} |\hat{\phi}|_{0, \infty, \hat{K}} |\hat{p}|_{0, \infty, \hat{K}} \end{aligned}$$

en désignant par $\hat{c}$ des constantes successives qui ne dépendent que du carré de référence.

Etant donné que $|\hat{\phi}|_{0, \infty, \hat{K}} \leq \|\hat{\phi}\|_{1, q, \hat{K}}$ et comme toutes les normes sont équivalentes sur l'espace de dimension finie $\hat{P}_2$, nous aurons :

$$(3-118) \quad |\hat{E}_K(\hat{\phi} \hat{p})| \leq \hat{c} \|\hat{\phi}\|_{1, q, \hat{K}} |\hat{p}|_{0, \hat{K}}.$$

Ainsi, pour $\hat{p} \in \hat{P}_2$ donné, la forme linéaire

$$\begin{aligned} W^{1, q}(\hat{K}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \hat{\phi} &\longrightarrow \hat{E}_K(\hat{\phi} \hat{p}) \end{aligned}$$

est continue et de norme $\leq \hat{c} |\hat{p}|_{0, \hat{K}}$ et pour tout $\hat{\phi} \in \hat{P}_0$,

$$\hat{E}_K(\hat{\phi} \hat{p}) = 0 \quad (\text{Hypothèse } H_3).$$

Par suite, en utilisant le lemme de Bramble-Hilbert (cf. Ciarlet [4], n°8, th. 3), il existe une constante $\hat{c}$ telle que :

$$(3-119) \quad \forall \hat{\phi} \in W^{1, q}(\hat{K}), \forall \hat{p} \in \hat{P}_2, |\hat{E}_K(\hat{\phi} \hat{p})| \leq \hat{c} |\hat{\phi}|_{1, q, \hat{K}} |\hat{p}|_{0, \hat{K}}.$$

Estimation sur K :

Soit maintenant $\hat{\varphi} = \widehat{\delta_{ii} v_h}$

$$|\hat{\varphi}|_{1,q,K} \leq \hat{c} \|B_K\| (\det B_K)^{-\frac{1}{q}} |\varphi|_{1,q,K}$$

$$|\hat{p}|_{0,K} \leq \hat{c} (\det B_K)^{-\frac{1}{2}} |p|_{0,K}.$$

Nous combinons ces inégalités ; nous aurons :

$$|\hat{E}_K(\hat{\varphi} \hat{p})| \leq \hat{c} \|B_K\| (\det B_K)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} |\varphi|_{1,q,K} |p|_{0,K}.$$

Il résulte :

$$|E_K(\varphi p)| \leq \hat{c} \|B_K\| (\det B_K)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} |\varphi|_{1,q,K} |p|_{0,K}.$$

Ainsi, pour $\hat{v}_h \in \hat{P}_K$, $\hat{w}_h \in \hat{P}_K$

$$(3-120) \quad |E_K(\delta_{ii} v_h \delta_{jj} w_h)| \leq c \|B_K\| (\det B_K)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} |v_h|_{3,q,K} |w_h|_{2,K}$$

$$(3-121) \quad \left| \sum_{K \in \tau_h} E_K(\delta_{ii} v_h \delta_{jj} w_h) \right| \leq \sum_{K \in \tau_h} |E_K(\delta_{ii} v_h \delta_{jj} w_h)| \\ \leq c \|B_K\| (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} |v_h|_{3,q,\Omega} \|w_h\|_h.$$

Nous savons $\|B_K\| \leq \hat{c} h$ (cf. Ciarlet [6], th. 3.1-3). Ainsi, il existe une constante c indépendante de h telle que :

$$(3-122) \quad \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a_h(v_h, w_h) - \tilde{a}_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_h} \leq c h (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} |v|_{3,q,\Omega} \|w_h\|_h$$

C. Q. F. D.

b) Cas où la transformation F_K est non affine :

Nous aurons :

$$(3-123) \quad E_K(\delta_{ii} v_h \delta_{jj} w_h) = \hat{E}_K(\widehat{\delta_{ii} v_h} \widehat{\delta_{jj} w_h} J_{F_K}) \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

Alors, il est clair qu'au contraire du cas affine les fonctions

$\widehat{\partial_{ii} v_h}$ et $\widehat{\partial_{jj} w_h}$ n'appartiennent pas à l'espace d'éléments finis $\hat{P}_K$

en général i. e. $\widehat{\partial_{ii} v_h}, \widehat{\partial_{jj} w_h} \notin \hat{P}_K, \quad 1 \leq i, j \leq 2.$

Nous remarquons que dans le développement de l'expression de

$J \frac{\widehat{\partial^2 v_h}}{\partial x^2} \frac{\widehat{\partial^2 w_h}}{\partial x^2}$ on a trois types d'expressions, en utilisant celles données

dans la remarque (3-2).

Première expression :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{J^3} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi^2} \\
 (3-124) \quad & \frac{1}{J^3} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi^2} \\
 & - \frac{J'}{J^4} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi^2}.
 \end{aligned}$$

Deuxième expression :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{J^3} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi \partial \eta} \\
 (3-125) \quad & \frac{1}{J^3} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi \partial \eta} \\
 & - \frac{J'}{J^4} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi \partial \eta} \\
 & \frac{1}{J^3} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi \partial \eta}.
 \end{aligned}$$

Troisième expression :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{J^3} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \hat{w}_h}{\partial \xi} \\
 & \frac{1}{J^3} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \hat{w}_h}{\partial \xi} \\
 & \frac{1}{J^3} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \hat{w}_h}{\partial \xi} \\
 & - \frac{J'}{J^4} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \hat{w}_h}{\partial \xi}
 \end{aligned}
 \tag{3-126}$$

Donc l'estimation de $\hat{E}_K \left(J \frac{\partial v_h}{\partial x^2} \frac{\partial w_h}{\partial x^2} \right)$ revient à estimer $\hat{E}_K(.,.)$

des expressions (3-124) à (3-126).

Estimation de la première expression :

Lemme (3-5) :

Nous supposons les hypothèses (H_1) , (H_2) , (H_3) vérifiées.

Alors il existe une constante c indépendante de h telle que :

$$\begin{aligned}
 & \left| \hat{E}_K \left(\frac{1}{J^3} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi^2} \right) \right| \\
 & \leq c \left(h |v_h|_{3,K} + z h^{-1} |v_h|_{2,K} \right) |w_h|_{2,K}.
 \end{aligned}
 \tag{3-127}$$

Démonstration :

On note par la suite $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ ou $\frac{\partial y}{\partial \xi}$ par ∂y . D'après l'injection de Sobolev, on a $W^{1,\infty}(\hat{K}) \hookrightarrow C^0(\hat{K})$. Pour un $\hat{\psi} \in \hat{P}_K$ et tout $\hat{\varphi} \in W^{1,\infty}(\hat{K})$ soit l'application :

$$(3-128) \quad \hat{\phi} \rightarrow \hat{E}_K(\hat{\phi} \hat{\psi}) = \frac{1}{h_K^2} \left(\int_{\hat{K}} \hat{\phi} \hat{\psi} \, d\xi \, d\eta - \sum_{\ell=1}^L \hat{w}_\ell(\hat{\phi} \hat{\psi}) (\hat{b}_\ell) \right) = \frac{1}{h_K^2} R_K(\hat{\phi} \hat{\psi}).$$

Nous avons :

$$|R_K(\hat{\phi} \hat{\psi})| \leq \hat{c} |\hat{\phi} \hat{\psi}|_{0,\infty,\hat{K}} \leq \hat{c} |\hat{\phi}|_{0,\infty,\hat{K}} |\hat{\psi}|_{0,\infty,\hat{K}}$$

en désignant par $\hat{c}$ des constantes successives qui ne dépendent que du carré de référence.

Etant donné que $|\hat{\phi}|_{0,\infty,\hat{K}} \leq \|\hat{\phi}\|_{1,\infty,\hat{K}}$ et comme toutes les normes sont équivalentes sur l'espace de dimension finie $\hat{P}_K$ on en déduit

$$|R_K(\hat{\phi} \hat{\psi})| \leq \hat{c} \|\hat{\phi}\|_{1,\infty,\hat{K}} |\hat{\psi}|_{0,\hat{K}}.$$

Ainsi, pour $\hat{\psi} \in \hat{P}_K$ donné, la forme linéaire (3-128) est continue avec une norme $\leq |\hat{\psi}|_{0,\hat{K}}$ et elle s'annule pour $\hat{\phi} \in \hat{P}_0$.

Par la suite, en utilisant le lemme de Bramble-Hilbert, il existe une constante $\hat{c}$ telle que :

$$(3-129) \quad \forall \hat{\phi} \in W^{1,\infty}(\hat{K}), \forall \hat{\psi} \in \hat{P}_K \quad |R_K(\hat{\phi} \hat{\psi})| \leq \hat{c} |\hat{\phi}|_{1,\infty,K} |\hat{\psi}|_{0,\hat{K}}.$$

$$\text{Soit } \hat{\phi} = h_K^4 \frac{(\partial y)^2}{J^3} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2}, \quad \hat{\psi} = \left(\frac{\partial y}{h_K} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi^2} \in \hat{P}_K.$$

On a la formule de Leibniz suivante :

pour tout $\varphi \in W^{m,q}(\Omega)$ et $w \in W^{m,\infty}(\Omega)$, $\varphi w \in W^{m,q}(\Omega)$ et

$$|\varphi w|_{m,q,\Omega} \leq c \sum_{j=0}^m |\varphi|_{m-j,q,\Omega} |w|_{j,\infty,\Omega}, \quad \text{la constante } c \text{ ne dépend que de}$$

m et n dimension de l'espace.

Appliquons ceci :

$$\begin{aligned}
 |\hat{\phi}|_{1,\infty,\hat{K}} &= \left| h_K^4 \frac{(\partial y)^2}{J^3} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} \right|_{1,\infty,\hat{K}} \\
 (3-130) \quad &\leq c \left(\left| h_K^4 \frac{(\partial y)^2}{J^3} \right|_{0,\infty,\hat{K}} \left| \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} \right|_{1,\infty,\hat{K}} + \left| h_K^4 \frac{(\partial y)^2}{J^3} \right|_{1,\infty,\hat{K}} \left| \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} \right|_{0,\infty,\hat{K}} \right) \\
 &\leq c \left(h_K^4 \sup \frac{(\partial y)^2}{J^3} |\hat{v}_h|_{3,\hat{K}} + h_K^4 \left| D \frac{(\partial y)^2}{J^3} \right|_{0,\infty,\hat{K}} \left| \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} \right|_{0,\hat{K}} \right).
 \end{aligned}$$

Toujours le même argument, on a utilisé le fait que les normes $|\cdot|_{0,\hat{K}}$ et $|\cdot|_{0,\infty,\hat{K}}$ sont équivalentes sur l'espace de dimension finie.

Nous savons que $|\partial y| \leq c h_K$, $J \leq c h_K^2$, $J' = 0$ ($h_K z_K$)
 $|D(\partial y)| = \delta \leq c z_K$ (d'après (3-17) et (3-18)).

Nous déduisons que :

$$(3-131) \quad h_K^4 \sup \frac{(\partial y)^2}{J^3} \leq c$$

$$(3-132) \quad h_K^4 \left| D \frac{(\partial y)^2}{J^3} \right|_{0,\infty,\hat{K}} \leq c z_K h_K^{-1}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
 |\hat{\phi}|_{1,\infty,\hat{K}} &\leq c \left(|\hat{v}_h|_{3,\hat{K}} + z_K h_K^{-1} \left| \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} \right|_{0,\hat{K}} \right) \\
 |\hat{\psi}|_{0,\hat{K}} &= \left| \frac{(\partial y)^2}{J} \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi^2} \right|_{0,\hat{K}} \leq c \left| \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi^2} \right|_{0,\hat{K}} \leq c [\hat{w}]_{2,\hat{K}}
 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
 (3-133) \quad |R_K(\hat{\phi}\hat{\psi})| &\leq c \left(|\hat{v}_h|_{3,\hat{K}} + z_K h_K^{-1} \left| \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} \right|_{0,\hat{K}} \right) \left| \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi^2} \right|_{0,\hat{K}} \\
 |R_K(\hat{\phi}\hat{\psi})| &\leq c \left(|\hat{v}_h|_{3,\hat{K}} + z_K h_K^{-1} [\hat{v}_h]_{2,\hat{K}} \right) [\hat{w}_h]_{2,\hat{K}}.
 \end{aligned}$$

Estimation sur K :

En appliquant le lemme (0-9) (Lesaint [19])

$$(3-134) \quad |\hat{v}_h|_{3,K} \leq \hat{c} (\inf J)^{-\frac{1}{2}} \sum_{\ell=2}^3 h_K^{2\ell-3} z_K^{3-\ell} |v_h|_{\ell,K}$$

$$\leq \hat{c} (\inf J)^{-\frac{1}{2}} (h_K z_K |v_h|_{2,K} + h_K^3 |v_h|_{3,K})$$

$$(3-135) \quad [\hat{v}_h]_{2,K} \leq \hat{c} (\inf J)^{-\frac{1}{2}} h_K^2 |v_h|_{2,K}$$

$$(3-136) \quad [\hat{w}_h]_{2,K} \leq \hat{c} (\inf J)^{-\frac{1}{2}} h_K^2 |w_h|_{2,K}.$$

Nous combinons toutes ces inégalités et nous déduisons que :

$$|R_K(\hat{\phi}\hat{\psi})| \leq c (\inf J)^{-1} h_K^2 (h_K^3 |v_h|_{3,K} + h_K z_K |v_h|_{2,K} + h_K z_K |v_h|_{2,K}) |w_h|_{2,K}$$

$$\leq c (h^3 |v_h|_{3,K} + h z |v_h|_{2,K}) |w_h|_{2,K}$$

$$|\hat{E}_K(\hat{\phi}\hat{\psi})| \leq \frac{|R_K(\hat{\phi}\hat{\psi})|}{h_K^2}$$

$$\leq c h^{-2} (h^3 |v_h|_{3,K} + z h |v_h|_{2,K}) |w_h|_{2,K}$$

ce qui donne :

$$(3-137) \quad |\hat{E}_K(\hat{\phi}\hat{\psi})| \leq c (h |v_h|_{3,K} + z h^{-1} |v_h|_{2,K}) |w_h|_{2,K}$$

C. Q. F. D.

Lemme (3-6) :

Nous supposons les hypothèses (H_1) , (H_2) , (H_3) vérifiées.

Alors, il existe une constante c indépendante de h telle que :

$$(3-138) \quad \left| \hat{E}_K \left(\frac{1}{J^3} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi^2} \right) \right|$$

$$\leq c (z h^{-1} |v_h|_{2,K} + z^2 h^{-3} |v_h|_{1,K}) |w_h|_{2,K}.$$

En reprenant les notations du lemme (3-5)

$$W^{1,\infty}(\hat{K}) \hookrightarrow C^0(\hat{K})$$

$$\hat{\phi} \longrightarrow \hat{E}_K(\hat{\phi} \hat{\psi}) = \frac{1}{h_K^2} R_K(\hat{\phi} \hat{\psi}).$$

Pour tout $\hat{\psi} \in \hat{P}_K$ et pour tout $\hat{\phi} \in W^{1,\infty}(\hat{K})$, nous aurons :

$$|R_K(\hat{\phi} \hat{\psi})| \leq \hat{c} |\hat{\phi}|_{1,\infty,\hat{K}} |\hat{\psi}|_{0,\hat{K}}.$$

$$\text{Soient } \hat{\phi} = h_K^4 \frac{\partial y}{J^3} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} \quad ; \quad \hat{\psi} = \left(\frac{\partial y}{h_K}\right)^2 \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi^2}$$

$$\begin{aligned} |\hat{\phi}|_{1,\infty,\hat{K}} &= \left| h_K^4 \frac{\partial y}{J^3} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} \right|_{1,\infty,\hat{K}} \\ &\leq \hat{c} \left(\left| h_K^4 \frac{\partial y}{J^3} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \right|_{0,\infty,\hat{K}} \left| \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} \right|_{1,\infty,\hat{K}} + \left| h_K^4 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{J^3} \right|_{1,\infty,\hat{K}} \left| \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} \right|_{0,\infty,\hat{K}} \right) \\ &\leq \hat{c} \left(\left| h_K^4 \frac{\partial y}{J^3} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \right|_{0,\infty,\hat{K}} |\hat{v}_h|_{2,\hat{K}} + \left| h_K^4 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{J^3} \right|_{1,\infty,\hat{K}} |\hat{v}_h|_{1,\hat{K}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{on a } \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = \delta \leq \hat{c} z_K \quad (\text{d'après (3-17)})$$

donc :

$$(3-139) \quad \left| h_K^4 \frac{\partial y}{J^3} \delta \right|_{0,\infty,\hat{K}} \leq \hat{c} z_K h_K^{-1}$$

et

$$(3-140) \quad \left| h_K^4 \delta \frac{\partial y}{J^3} \right|_{1,\infty,\hat{K}} \leq \hat{c} z_K^2 h_K^{-2}$$

$$\text{d'où} \quad |\hat{\phi}|_{1,\infty,\hat{K}} \leq \hat{c} (z_K h_K^{-1} |\hat{v}_h|_{2,\hat{K}} + z_K^2 h_K^{-2} |\hat{v}_h|_{1,\hat{K}})$$

$$\text{et} \quad |\hat{\psi}|_{0,\hat{K}} \leq \hat{c} [\hat{w}_h]_{2,\hat{K}}.$$

Comme dans le lemme précédent, on a :

$$|\hat{v}_h|_{2, \hat{K}} \leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-\frac{1}{2}} (z_K |v_h|_{1, K} + h_K^2 |v_h|_{2, K})$$

$$[\hat{w}_h]_{2, \hat{K}} \leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-\frac{1}{2}} h_K^2 |w_h|_{2, K}$$

$$|\hat{v}_h|_{1, \hat{K}} \leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-\frac{1}{2}} h_K |v_h|_{1, K}.$$

Nous combinons toutes ces inégalités, nous déduisons que :

$$(3-141) \quad |R_K(\hat{\phi} \hat{\psi})| \leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-1} h_K^2 [z_K^2 h_K^{-1} |v_h|_{1, K} + z_K h_K |v_h|_{2, K} + z_K^2 h_K^{-1} |v_h|_{1, K}] |w_h|_{2, K}$$

ce qui donne :

$$(3-142) \quad |\hat{E}_K(\hat{\phi} \hat{\psi})| \leq \hat{c} h_K^{-2} (\text{Inf } J)^{-1} h_K^2 [z_K^2 h_K^{-1} |v_h|_{1, K} + z_K h_K |v_h|_{2, K}] |w_h|_{2, K} \\ \leq \hat{c} [z h^{-1} |v_h|_{2, K} + z^2 h^{-3} |v_h|_{1, K}] |w_h|_{2, K}$$

C. Q. F. D.

Lemme (3-7) :

Nous supposons les hypothèses (H_1) , (H_2) , (H_3) vérifiées. Alors

$$(3-143) \quad \left| \hat{E}_K \left(\frac{J'}{J^4} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi^2} \right) \right| \\ \leq c (z h^{-1} |v_h|_{2, K} + z^2 h^{-3} |v_h|_{1, K}) |w_h|_{2, K}.$$

Démonstration :

Nous reprenons les mêmes notations que dans le lemme (3-5).

Nous aurons :

$$|R_K(\hat{\phi} \hat{\psi})| \leq \hat{c} |\hat{\phi}|_{1, \infty, \hat{K}} |\hat{\psi}|_{0, \hat{K}} \quad \text{pour tout } \hat{\psi} \in \hat{P}_K \text{ et}$$

$$\hat{\phi} \in W^{1, \infty}(\hat{K}).$$

$$\text{Soient } \hat{\phi} = h_K^4 \frac{J'}{J^4} (\partial y)^2 \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} \quad , \quad \hat{\psi} = \left(\frac{\partial y}{h_K} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi^2}.$$

D'après les expressions (3-131) et (3-132) et $J' \leq c z_K h_K$ on a :

$$(3-144) \quad \begin{cases} \left| h_K^4 \frac{J'}{J^4} (\partial y)^2 \right|_{0,\infty,\hat{K}} \leq \hat{c} z_K h_K^{-1} \\ \left| h_K^4 \frac{J'}{J^4} (\partial y)^2 \right|_{1,\infty,\hat{K}} \leq \hat{c} z_K^2 h_K^{-2} \end{cases}$$

ce qui donne, avec la formule de Leibniz :

$$|\hat{\phi}|_{1,\infty,\hat{K}} \leq \hat{c} \left(z_K h_K^{-1} |\hat{v}_h|_{2,\hat{K}} + z_K^2 h_K^{-2} |\hat{v}_h|_{1,\hat{K}} \right)$$

$$|\hat{\psi}|_{0,\hat{K}} \leq c [\hat{w}_h]_{2,\hat{K}}.$$

Sur K , on aura l'estimation (lemme (0-9))

$$|\hat{v}_h|_{2,\hat{K}} \leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-\frac{1}{2}} \left(z_K |v_h|_{1,K} + h_K^2 |v_h|_{2,K} \right)$$

$$|\hat{v}_h|_{1,\hat{K}} \leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-\frac{1}{2}} h_K |v_h|_{1,K}.$$

Alors :

$$|\hat{\phi}|_{1,\infty,\hat{K}} \leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-\frac{1}{2}} \left(z_K^2 h_K^{-1} |v_h|_{1,K} + z_K h_K |v_h|_{2,K} \right)$$

$$|\hat{\psi}|_{0,\hat{K}} \leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-\frac{1}{2}} h_K^2 |w_h|_{2,K}.$$

Il résulte que :

$$|R_K(\hat{\phi}\hat{\psi})| \leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-1} h_K^2 \left(z_K^2 h_K^{-1} |v_h|_{1,K} + z_K h_K |v_h|_{2,K} \right) |w_h|_{2,K}$$

$$(3-145) \quad \text{et} \quad |\hat{E}_K(\hat{\phi}\hat{\psi})| \leq \hat{c} h_K^{-2} (\text{Inf } J)^{-1} h_K^2 [z_K^2 h_K^{-1} |v_h|_{1,K} + z_K h_K |v_h|_{2,K}] |w_h|_{2,K} \\ \leq \hat{c} \left(z^2 h^{-3} |v_h|_{1,K} + z h^{-1} |v_h|_{2,K} \right)$$

C. Q. F. D.

Estimation de la deuxième expression :

Lemme (3-8) :

Nous supposons les hypothèses (H_1) , (H_2) , (H_3) vérifiées.

Alors il existe une constante c indépendante de h telle que :

$$(3-146) \quad \left| \hat{E}_K \left(\frac{1}{J^3} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right) \right|$$

$$\leq c \cdot (h |v_h|_{3,K} + z h^{-1} |v_h|_{2,K}) (|w_h|_{2,K} + z h^{-2} |w_h|_{1,K})$$

Démonstration :

Nous reprenons les notations du lemme (3-5). Nous savons que

$$\frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi \partial \eta} \in \hat{P}_2, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \in \hat{Q}_1, \quad \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \in \hat{Q}_3 \quad (\text{d'après (3-16) et (3-19)})$$

pour un $\hat{\psi} \in \hat{P}_K$ et tout $\hat{\phi} \in W^{1,\infty}(\hat{K})$, soit l'application :

$$\hat{\phi} \longrightarrow \hat{E}_K(\hat{\phi} \hat{\psi}) = \frac{1}{h_K^2} R_K(\hat{\phi} \hat{\psi}).$$

Pour tout $\hat{\psi} \in \hat{P}_K$ et pour tout $\hat{\phi} \in W^{1,\infty}(\hat{K})$, nous aurons :

$$|R_K(\hat{\phi} \hat{\psi})| \leq c |\hat{\phi}|_{1,\infty,\hat{K}} |\hat{\psi}|_{0,\hat{K}}.$$

$$\text{Soient } \hat{\phi} = \frac{h_K^4}{J^3} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2}, \quad \hat{\psi} = \frac{1}{h_K^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$|\hat{\phi}|_{1,\infty,\hat{K}} = \left| h^4 \frac{(\partial y)^2}{J^3} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} \right|_{1,\infty,\hat{K}}$$

$$\leq \hat{c} \left(\left| h_K^4 \frac{(\partial y)^2}{J^3} \right|_{0,\infty,\hat{K}} \left| \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} \right|_{1,\infty,\hat{K}} + \left| h_K^4 \frac{(\partial y)^2}{J^3} \right|_{1,\infty,\hat{K}} \left| \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} \right|_{0,\infty,\hat{K}} \right)$$

$$\leq \hat{c} \left(\left| h_K^4 \frac{(\partial y)^2}{J^3} \right|_{0,\infty,\hat{K}} |\hat{v}_h|_{3,\hat{K}} + \left| h_K^4 \frac{(\partial y)^2}{J^3} \right|_{1,\infty,\hat{K}} \left| \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} \right|_{0,\hat{K}} \right).$$

(3-131) et (3-132) donnent :

$$|\hat{\phi}|_{1,\infty,\hat{K}} \leq \hat{c} \left(|\hat{v}_h|_{3,\hat{K}} + z_K h_K^{-1} \left| \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} \right|_{0,\hat{K}} \right)$$

mais

$$\left| \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} \right|_{0,\hat{K}} \leq [\hat{v}_h]_{2,\hat{K}}$$

$$|\hat{\phi}|_{1,\infty,\hat{K}} \leq \hat{c} \left(|\hat{v}_h|_{3,\hat{K}} + z_K h_K^{-1} [\hat{v}_h]_{2,\hat{K}} \right)$$

$$|\hat{\psi}|_{0,\hat{K}} \leq \hat{c} \left| \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right|_{0,\hat{K}}.$$

Il résulte donc :

$$(3-147) \quad |R_K(\hat{\phi}\hat{\psi})| \leq \hat{c} \left(|\hat{v}|_{3,\hat{K}} + z_K h_K^{-1} [\hat{v}]_{2,\hat{K}} \right) \left| \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right|_{0,\hat{K}}.$$

Estimation sur K :

On applique toujours le lemme (0-9).

$$(3-148) \quad \left| \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right|_{0,\hat{K}} \leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-\frac{1}{2}} \left(z_K |w_h|_{1,K} + h_K^2 |w_h|_{2,K} \right).$$

(3-148) avec (3-134) et (3-135) donnent :

$$|R_K(\hat{\phi}\hat{\psi})| \leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-1} \left(h_K^3 |v_h|_{3,K} + z_K h_K |v_h|_{2,K} \right)$$

$$\left(z_K |w_h|_{1,K} + h_K^2 |w_h|_{2,K} \right)$$

et

$$|\hat{E}_K(\hat{\phi}\hat{\psi})| \leq c h_K^{-2} (\text{Inf } J)^{-1} \left(h_K^3 |v_h|_{3,K} + z_K h_K |v_h|_{2,K} \right)$$

$$\left(z_K |w_h|_{1,K} + h_K^2 |w_h|_{2,K} \right)$$

$$\leq c h_K^{-2} (\text{Inf } J)^{-1} h_K^2 \left(h_K^3 |v_h|_{3,K} + z_K h_K |v_h|_{2,K} \right)$$

$$\left(\frac{z_K}{h_K} |w_h|_{1,K} + |w_h|_{2,K} \right).$$

Il résulte que :

$$(3-149) \quad |\hat{E}_K(\hat{\phi} \hat{\psi})| \leq \hat{c} (h_K |v_h|_{3,K} + z_K h_K^{-1} |v_h|_{2,K}) (z_K h_K^{-2} |w_h|_{1,K} + |w_h|_{2,K})$$

C. Q. F. D.

Lemme (3-9) :

Nous supposons les hypothèses (H_1) , (H_2) , (H_3) vérifiées. Alors, il existe une constante c indépendante de h telle que :

$$(3-150) \quad \left| \hat{E}_K \left(\frac{1}{J^3} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right) \right| \leq c (z^2 h^{-3} |v_h|_{1,K} + z h^{-1} |v_h|_{2,K}) (|w_h|_{2,K} + z h^{-2} |w_h|_{1,K})$$

Démonstration :

On suppose toujours les notations du lemme (3-5)

$$|R_K(\hat{\phi} \hat{\psi})| \leq c |\hat{\phi}|_{1,\infty,\hat{K}} |\hat{\psi}|_{0,\hat{K}}$$

avec
$$\hat{\phi} = h_K^4 \frac{\partial y}{J^3} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi}, \quad \hat{\psi} = \frac{1}{h_K^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi \partial \eta}.$$

On remarque que $\hat{\phi}$ est le même terme que $\hat{\phi}$ qui apparaît dans le lemme (3-6), donc se majore de la même manière

d'où :

$$|\hat{\phi}|_{1,\infty,\hat{K}} \leq \hat{c} (z_K h_K^{-1} |\hat{v}_h|_{2,\hat{K}} + z_K^2 h_K^{-2} |\hat{v}_h|_{1,\hat{K}})$$

$$|\hat{\psi}|_{0,\hat{K}} \leq \hat{c} \left| \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right|_{0,\hat{K}}$$

$$|R_K(\hat{\phi} \hat{\psi})| \leq \hat{c} (z_K h_K^{-1} |\hat{v}_h|_{2,\hat{K}} + z_K^2 h_K^{-2} |\hat{v}_h|_{1,\hat{K}}) \left| \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right|_{0,\hat{K}}.$$

Estimation sur K :

L'application du lemme (0-9) donne :

$$|R_K(\hat{\phi} \hat{\psi})| \leq \hat{c} (\inf J)^{-1} (z^2 h_K^{-1} |v_h|_{1,K} + z_K h_K |v_h|_{2,K}) (z_K |w_h|_{1,K} + h_K^2 |w_h|_{2,K})$$

$$|R_K(\hat{\phi} \hat{\psi})| \leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-1} h_K^2 (z_K^2 h_K^{-1} |v_h|_{1,K} + z_K h_K |v_h|_{2,K}) \\ \left(\frac{z_K}{h_K^2} |w_h|_{1,K} + |w_h|_{2,K} \right).$$

Il résulte que :

$$|\hat{E}_K(\hat{\phi} \hat{\psi})| \leq \hat{c} (z_K h_K^{-3} |v_h|_{1,K} + z_K h_K^{-1} |v_h|_{2,K}) \\ (z_K h_K^{-2} |w_h|_{1,K} + |w_h|_{2,K})$$

C. Q. F. D.

Lemme (3-10) :

Nous supposons les hypothèses (H_1) , (H_2) , (H_3) vérifiées.

Alors, il existe une constante c indépendante de h telle que :

$$(3-151) \quad \left| \hat{E}_K \left(\frac{J'}{J^4} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \xi \partial \eta} \right) \right| \\ \leq c (z h^{-1} |v_h|_{2,K} + z^2 h^{-3} |v_h|_{1,K}) (|w_h|_{2,K} + z h^{-2} |w_h|_{1,K}).$$

Démonstration :

On suppose toujours les notations du lemme (3-5)

$$|R_K(\hat{\phi} \hat{\psi})| \leq \hat{c} |\hat{\phi}|_{1,\infty,\hat{K}} |\hat{\psi}|_{0,K}$$

avec $\hat{\phi} = h_K^4 \frac{J'}{J^4} (\partial y)^2 \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi}$ qui est celle du lemme (3-7)

et $\hat{\psi} = \frac{1}{h_K^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi \partial \eta}$

d'où $|\hat{\phi}|_{1,\infty,\hat{K}} \leq \hat{c} (z_K h_K^{-1} |\hat{v}_h|_{2,\hat{K}} + z_K^2 h_K^{-2} |\hat{v}_h|_{1,\hat{K}})$

$$|\hat{\psi}|_{0,\hat{K}} \leq \hat{c} \left[\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \xi \partial \eta} \right]_{0,\hat{K}} \leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-\frac{1}{2}} (z_K |w_h|_{1,K} + h_K^2 |w_h|_{2,K}).$$

Le lemme (0-9) donne :

$$|R_K(\hat{\phi} \hat{\psi})| \leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-1} \left(z_K^2 h^{-1} |v_h|_{1,K} + z_K h_K |v_h|_{2,K} \right) \\ \left(z_K |w_h|_{1,K} + h_K^2 |w_h|_{2,K} \right)$$

qu'on peut écrire encore :

$$|R_K(\hat{\phi} \hat{\psi})| \leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-1} h_K^2 \left(z_K^2 h_K^{-1} |v_h|_{1,K} + z_K h_K |v_h|_{1,K} \right) \\ \left(z_K h_K^{-2} |w_h|_{1,K} + |w_h|_{2,K} \right).$$

Il résulte que :

$$|\hat{E}_K(\hat{\phi} \hat{\psi})| \leq \hat{c} \left(z^2 h^{-3} |v_h|_{1,K} + z h^{-1} |v_h|_{2,K} \right) \left(z h^{-2} |w_h|_{1,K} + |w_h|_{2,K} \right)$$

C. Q. F. D.

Lemme (3-11) :

Nous supposons les hypothèses (H_1) , (H_2) , (H_3) vérifiées.

Alors, il existe une constante c indépendante de h telle que :

$$(3-152) \quad \left| \hat{E}_K \left(\frac{1}{J^3} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right) \right| \\ \leq c \left(h |v_h|_{3,K} + z h^{-1} |v_h|_{2,K} + z^2 h^{-3} |v_h|_{1,K} \right) \left(z h^{-2} |w_h|_{1,K} + |w_h|_{2,K} \right).$$

Démonstration :

Nous reprenons les notations du lemme (3-5). Nous avons

$$|R_K(\hat{\phi} \hat{\psi})| \leq \hat{c} |\hat{\phi}|_{1,\infty,K} |\hat{\psi}|_{0,\hat{K}} \quad \text{avec } \hat{\phi} = h_K^2 \frac{1}{J^3} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta}, \quad \hat{\psi} = \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi \partial \eta}.$$

D'après la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}
 |\hat{\phi}|_{1,\infty,\hat{K}} &= \left| h_K^2 \frac{1}{J^3} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right|_{1,\infty,\hat{K}} \\
 &\leq \hat{c} \left(\left| h_K^2 \frac{1}{J^3} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right|_{0,\infty,\hat{K}} \left| \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right|_{1,\infty,\hat{K}} \right. \\
 &\quad \left. + \left| h_K^2 \frac{1}{J^3} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right|_{1,\infty,\hat{K}} \left| \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right|_{0,\infty,\hat{K}} \right) \\
 &\leq \hat{c} \left(\left| h_K^2 \frac{1}{J^3} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right|_{0,\infty,\hat{K}} |\hat{v}_h|_{3,\hat{K}} \right. \\
 &\quad \left. + \left| h_K^2 \frac{1}{J^3} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right|_{1,\infty,\hat{K}} \left| \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right|_{0,\infty,\hat{K}} \right)
 \end{aligned}$$

$$(3-153) \quad \left| h_K^2 \frac{1}{J^3} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right|_{0,\infty,\hat{K}} \leq \hat{c}$$

$$(3-154) \quad \left| h_K^2 \frac{1}{J^3} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right|_{1,\infty,\hat{K}} \leq \hat{c} z_K h_K^{-1}, \text{ en effet :}$$

$$\begin{aligned}
 D \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 &= 2 \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \right) \\
 &= 2 \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right) \\
 &= 2 \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \text{ notée } \Delta \quad \left(\text{car } \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} = 0 \right)
 \end{aligned}$$

on aura : $|\Delta| \leq z_K h_K^3$

$$\begin{aligned}
 \left| h_K^2 \frac{1}{J^3} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right|_{1,\infty,\hat{K}} &= h_K^2 \frac{\Delta J^3 - 3 J^1 J^2 \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2}{J^6} \\
 &= h_K^2 \frac{\Delta J - 3 J^1 \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2}{J^4}
 \end{aligned}$$

$$\text{d'où :} \quad \left| h_K^2 \frac{1}{J^3} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right|_{1,\infty,\hat{K}} \leq \hat{c} h_K^2 \frac{z_K h_K^5}{J^4} \leq \hat{c} z_K h_K^{-1}.$$

(3-153) et (3-154) donnent que :

$$|\hat{\phi}|_{1,\infty,\hat{K}} \leq \hat{c} \left(|\hat{v}_h|_{3,\hat{K}} + z_K h_K^{-1} \left[\frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right]_{0,\hat{K}} \right)$$

$$|\hat{\psi}|_{0,\hat{K}} \leq \hat{c} \left| \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right|_{0,\hat{K}} = \hat{c} \left[\frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right]_{0,\hat{K}}.$$

On applique le lemme (0-9)

$$(3-155) \quad |\hat{v}_h|_{3,\hat{K}} \leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-\frac{1}{2}} (h_K z_K |v_h|_{2,K} + h_K^3 |v_h|_{3,K})$$

$$\left[\frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right]_{0,\hat{K}} \leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-\frac{1}{2}} (z_K |v_h|_{1,K} + h_K^2 |v_h|_{2,K})$$

$$\left[\frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right]_{0,\hat{K}} \leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-\frac{1}{2}} (z_K |w_h|_{1,K} + h_K^2 |w_h|_{2,K}).$$

Les deux dernières inégalités peuvent s'écrire :

$$\left| \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right|_{0,\hat{K}} \leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-\frac{1}{2}} h_K^2 \left(\frac{z_K}{h_K^2} |v_h|_{1,K} + |v_h|_{2,K} \right)$$

$$\left| \frac{\partial^2 \hat{w}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right|_{0,\hat{K}} \leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-\frac{1}{2}} h_K^2 \left(\frac{z_K}{h_K^2} |w_h|_{1,K} + |w_h|_{2,K} \right)$$

ce qui implique :

$$(3-156) \quad |\hat{\phi}|_{1,\infty,\hat{K}} \leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-\frac{1}{2}} h_K^2 (h_K |v_h|_{3,K} + z_K h_K^{-1} |v_h|_{2,K} + z_K^2 h_K^{-3} |v_h|_{1,K})$$

et

$$(3-157) \quad |\hat{\psi}|_{0,\hat{K}} \leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-\frac{1}{2}} h_K^2 (z_K h_K^{-2} |w_h|_{1,K} + |w_h|_{2,K}).$$

Nous combinons les inégalités (3-154) à (3-157). Nous aurons :

$$|R_K(\hat{\phi} \hat{\psi})| \leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-1} h_K^4 (h_K |v_h|_{3,K} + z_K h_K^{-1} |v_h|_{2,K} + z_K^2 h_K^{-3} |v_h|_{1,K})$$

$$\cdot (z_K h_K^{-2} |w_h|_{1,K} + |w_h|_{2,K})$$

$$\leq \hat{c} h_K^2 (h_K |v_h|_{3,K} + z_K h_K^{-1} |v_h|_{2,K} + z_K^2 h_K^{-3} |v_h|_{1,K}) (z_K h_K^{-2} |w_h|_{1,K} + |w_h|_{2,K})$$

Il résulte que :

$$|E_K(\hat{\varphi} \hat{\psi})| \leq \hat{c} \left(h_K |v_h|_{3,K} + z_K h_K^{-1} |v_h|_{2,K} + z_K^2 h_K^{-3} |v_h|_{1,K} \right) \\ \left(z_K h_K^{-2} |w_h|_{1,K} + |w_h|_{2,K} \right)$$

C. Q. F. D.

Estimation de la troisième expression :

Lemme (3-12) :

Nous supposons les hypothèses (H_1) , (H_2) , (H_3) vérifiées.

Alors, il existe une constante c indépendante de h telle que :

$$(3-158) \quad \left| \hat{E}_K \left(\frac{1}{J^3} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{w}_h}{\partial \xi} \right) \right| \\ \leq c \left(z h^{-1} |v_h|_{3,K} + z^2 h^{-3} |v_h|_{2,K} \right) |w_h|_{1,K}.$$

Démonstration :

Avec les mêmes notations du lemme (3-5), nous aurons :

$$|R_K(\hat{\varphi} \hat{\psi})| \leq \hat{c} |\hat{\varphi}|_{1,\infty,\hat{K}} |\hat{\psi}|_{0,\hat{K}} \quad \text{pour tout } \hat{\psi} \in \hat{P}_K$$

et tout $\hat{\varphi} \in W^{1,\infty}(\hat{K})$.

$$\text{Soient } \hat{\varphi} = h_K^3 \frac{1}{J^3} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2}, \quad \hat{\psi} = \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \hat{w}_h}{\partial \xi} \in \hat{Q}_3$$

(3-131) et (3-132) donnent :

$$(3-159) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| h_K^3 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{(\partial y)^2}{J^3} \right|_{0,\infty,\hat{K}} \leq \hat{c} \hat{z}_K h_K^{-1} \\ \left| h_K^3 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{(\partial y)^2}{J^3} \right|_{1,\infty,\hat{K}} \leq c \hat{z}_K^2 h_K^{-2}. \end{array} \right.$$

Avec la formule de Leibniz

$$\begin{aligned} |\hat{\phi}|_{1,\infty,\hat{K}} &\leq \hat{c} \left(z_K h_K^{-1} |\hat{v}_h|_{3,\hat{K}} + z_K^2 h_K^{-2} \left| \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi^2} \right|_{0,\hat{K}} \right) \\ &\leq \hat{c} \left(z_K h_K^{-1} |\hat{v}_h|_{3,\hat{K}} + z_K^2 h_K^{-2} [\hat{v}_h]_{2,\hat{K}} \right) \\ |\hat{\psi}|_{0,\hat{K}} &\leq \hat{c} |\hat{w}_h|_{1,\hat{K}} \end{aligned}$$

(3-134) et (3-135) donnent l'estimation sur K

$$\begin{aligned} |\hat{\phi}|_{1,\infty,\hat{K}} &\leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-\frac{1}{2}} \left(z_K h_K^{-1} z_K h_K |v_h|_{2,K} + z_K h_K^{-1} h_K^3 |v_h|_{3,K} \right. \\ &\quad \left. + z_K^2 h_K^{-2} h_K^2 |v_h|_{2,K} \right) \\ &\leq c (\text{Inf } J)^{-\frac{1}{2}} \left(z_K^2 |v_h|_{2,K} + z_K h_K^2 |v_h|_{3,K} \right) \\ |\hat{\psi}|_{0,\hat{K}} &\leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-\frac{1}{2}} h_K |w_h|_{1,K}. \end{aligned}$$

Nous combinons ces inégalités ; nous aurons :

$$|R_K(\hat{\phi}\hat{\psi})| \leq c (\text{Inf } J)^{-1} h_K \left(z_K^2 |v_h|_{2,K} + z_K h_K^2 |v_h|_{3,K} \right) |w_h|_{1,K}.$$

Il résulte alors :

$$\begin{aligned} |\hat{E}_K(\hat{\phi}\hat{\psi})| &\leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-1} h_K^{-2} h_K \left(z_K^2 |v_h|_{2,K} + z_K h_K^2 |v_h|_{3,K} \right) |w_h|_{1,K} \\ |\hat{E}_K(\hat{\phi}\hat{\psi})| &\leq \hat{c} \left(z^2 h^{-3} |v_h|_{2,K} + z h^{-1} |v_h|_{3,K} \right) |w_h|_{1,K} \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Lemme (3-13) :

Nous supposons les hypothèses (H_1) , (H_2) , (H_3) vérifiées. Alors

$$\begin{aligned} (3-160) \quad &\left| \hat{E}_K \left(\frac{1}{J^3} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \hat{w}_h}{\partial \xi} \right) \right| \\ &\leq c \left(z^3 h^{-5} |v_h|_{1,K} + z^2 h^{-3} |v_h|_{2,K} \right) |w_h|_{1,K}. \end{aligned}$$

Démonstration :

Toujours avec les mêmes notations du lemme (3-5), nous aurons :

$$|R_K(\hat{\phi}\hat{\psi})| \leq \hat{c} |\hat{\phi}|_{1,\infty,\hat{K}} |\hat{\psi}|_{0,\hat{K}} \quad \text{pour tout } \hat{\phi} \in W^{1,\infty}(\hat{K})$$

$$\text{et } \hat{\psi} \in \hat{P}_K.$$

$$\text{Soient } \hat{\phi} = \delta^2 h_K^3 \frac{\partial y}{J^3} \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi}, \quad \hat{\psi} = \left(\frac{\partial y}{h_K}\right) \frac{\partial \hat{w}_h}{\partial \xi} \in \hat{Q}_3$$

et on a :

$$(3-161) \quad \begin{cases} \left| \delta^2 h_K^3 \frac{\partial y}{J^3} \right|_{0,\infty,\hat{K}} \leq c z_K^2 h_K^{-2} \\ \left| \delta^2 h_K^3 \frac{\partial y}{J^3} \right|_{1,\infty,\hat{K}} \leq c z_K^3 h_K^{-3}. \end{cases}$$

Il résulte que :

$$|\hat{\phi}|_{1,\infty,\hat{K}} \leq \hat{c} (z_K^2 h_K^{-2} |\hat{v}_h|_{2,\hat{K}} + z_K^3 h_K^{-3} |\hat{v}_h|_{1,\hat{K}})$$

$$|\hat{\psi}|_{0,\hat{K}} \leq \hat{c} |\hat{w}_h|_{1,\hat{K}} \leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-\frac{1}{2}} h_K |w_h|_{1,K}.$$

L'estimation sur K donne :

$$(3-162) \quad |\hat{\phi}|_{1,\infty,\hat{K}} \leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-\frac{1}{2}} [z_K^3 h_K^{-2} |v_h|_{1,K} + z_K^2 |v_h|_{2,K} + z_K^3 h_K^{-2} |v_h|_{1,K}]$$

$$\leq \hat{c} (\text{Inf } J)^{-\frac{1}{2}} [z_K^2 |v_h|_{2,K} + z_K^3 h_K^{-2} |v_h|_{1,K}].$$

Il résulte que :

$$(3-163) \quad |R_K(\hat{\phi}\hat{\psi})| \leq \hat{c} [z_K^3 h_K^{-3} |v_h|_{1,K} + z_K^2 h_K^{-1} |v_h|_{2,K}] |w_h|_{1,K} \quad \text{qui est}$$

$$|\hat{E}_K(\hat{\phi}\hat{\psi})| \leq \hat{c} [z_K^3 h_K^{-5} |v_h|_{1,K} + z_K^2 h_K^{-3} |v_h|_{2,K}] |w_h|_{1,K}.$$

C. Q. F. D.

Lemme (3-14) :

Supposons les hypothèses (H_1) , (H_2) , (H_3) vérifiées. Alors

$$(3-164) \quad \left| \hat{E}_K \left(\frac{J'}{J^4} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \hat{w}_h}{\partial \xi} \right) \right| \\ \leq c \left(z^3 h^{-5} |v_h|_{1,K} + z^2 h^{-3} |v_h|_{2,K} \right) |w_h|_{1,K}.$$

Démonstration :

Toujours avec les mêmes notations du lemme (3-5), nous aurons :

$$|R_K(\hat{\phi} \hat{\psi})| \leq \hat{c} |\hat{\phi}|_{1,\infty,\hat{K}} |\hat{\psi}|_{0,K} \quad \text{pour tout } \hat{\phi} \in W^{1,\infty}(\hat{K})$$

$$\text{et } \hat{\psi} \in \hat{P}_K.$$

$$\text{Soient } \hat{\phi} = \delta h_K^3 \frac{J'}{J^4} (\partial y)^2 \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi}, \quad \hat{\psi} = \left(\frac{\partial y}{h_K} \right) \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \in \hat{Q}_3$$

(3-131) et (3-132) donnent :

$$(3-165) \quad \begin{cases} \left| \delta h_K^3 J' \frac{(\partial y)^2}{J^4} \right|_{0,\infty,K} \leq \hat{c} z_K^2 h_K^{-2} \\ \left| \delta h_K^3 J' \frac{(\partial y)^2}{J^4} \right|_{1,\infty,\hat{K}} \leq c z_K^3 h_K^{-3} \end{cases}$$

Il résulte que :

$$|\hat{\phi}|_{1,\infty,\hat{K}} \leq \hat{c} \left(z_K^2 h_K^{-2} |\hat{v}_h|_{2,\hat{K}} + z_K^3 h_K^{-3} |\hat{v}_h|_{1,\hat{K}} \right)$$

$$|\hat{\psi}|_{0,\hat{K}} \leq c |\hat{w}|_{1,\hat{K}}.$$

L'estimation sur K donne :

$$|\hat{\phi}| \leq \hat{c} (\inf J)^{-\frac{1}{2}} [z_K^3 h_K^{-2} |v_h|_{1,K} + z_K^2 |v_h|_{2,K}]$$

$$|\hat{\psi}|_{0,\hat{K}} \leq \hat{c} (\inf J)^{-\frac{1}{2}} h_K |w_h|_{1,K}.$$

Il résulte que :

$$(3-166) \quad |R_K(\hat{\phi}\hat{\psi})| \leq \hat{c} [z_K^3 h_K^{-3} |v_h|_{1,K} + z_K^2 h_K^{-1} |v_h|_{2,K}] |w_h|_{1,K}$$

$$\text{et} \quad |\hat{E}_K(\hat{\phi}\hat{\psi})| \leq \hat{c} (z_K^3 h_K^{-5} |v_h|_{1,K} + z_K^2 h_K^{-3} |v_h|_{2,K}) |w_h|_{1,K}$$

C. Q. F. D.

Lemme (3-15) :

Supposons les hypothèses (H_1) , (H_2) , (H_3) vérifiées.

Alors, il existe une constante indépendante de h telle que :

$$(3-167) \quad \left| \hat{E}_K \left(\frac{1}{J^3} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \hat{w}_h}{\partial \xi} \right) \right| \\ \leq c (z_K^3 h^{-5} |v_h|_{1,K} + z_K^2 h^{-3} |v_h|_{2,K} + z h^{-1} |v_h|_{3,K}) |w_h|_{1,K}.$$

Démonstration :

Nous reprenons les notations du lemme (3-5). Nous avons :

$$|R_K(\hat{\phi}\hat{\psi})| \leq \hat{c} |\hat{\phi}|_{1,\infty,\hat{K}} |\hat{\psi}|_{0,\hat{K}}$$

pour tout $\hat{\phi} \in W^{1,\infty}(\hat{K})$ et pour tout $\hat{\psi} \in \hat{P}_K$.

$$\text{Soient } \hat{\phi} = h_K^3 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{1}{J^3} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$\hat{\psi} = \left(\frac{\partial y}{h_K} \right) \cdot \frac{\partial \hat{w}_h}{\partial \xi}$$

on a :

$$(3-168) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| h_K^3 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{1}{J^3} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right|_{0,\infty,\hat{K}} \leq \hat{c} z_K h_K^{-1} \\ \left| h_K^3 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{1}{J^3} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right|_{1,\infty,\hat{K}} \leq \hat{c} z_K^2 h_K^{-2}. \end{array} \right.$$

Avec la formule de Leibniz

$$\begin{aligned}
 |\hat{\varphi}|_{1,\infty,\hat{K}} &\leq \hat{c} \left(\left| h_K^3 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{1}{J^3} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right|_{0,\infty,\hat{K}} |\hat{v}_h|_{3,\hat{K}} \right. \\
 &\quad \left. + \left| h_K^3 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{1}{J^3} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right|_{1,\infty,\hat{K}} \left| \frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right|_{0,\hat{K}} \right) \\
 |\hat{\varphi}|_{1,\infty,\hat{K}} &\leq \hat{c} (z_K h_K^{-1} |\hat{v}_h|_{3,\hat{K}} + z_K^2 h_K^{-2} \left[\frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right]_{0,\hat{K}}).
 \end{aligned}$$

Nous savons que :

$$\begin{aligned}
 |\hat{v}_h|_{3,\hat{K}} &\leq \hat{c} (\inf J)^{-\frac{1}{2}} (z_K h_K |v_h|_{2,K} + h_K^3 |v_h|_{3,K}) \\
 \left[\frac{\partial^2 \hat{v}_h}{\partial \xi \partial \eta} \right]_{0,\hat{K}} &\leq \hat{c} (\inf J)^{-\frac{1}{2}} (z_K |v_h|_{1,K} + h_K^2 |v_h|_{2,K}).
 \end{aligned}$$

Nous combinons ces inégalités ; nous aurons :

$$\begin{aligned}
 |\hat{\varphi}|_{1,\infty,\hat{K}} &\leq \hat{c} (\inf J)^{-\frac{1}{2}} (z_K^2 |v_h|_{2,K} + z_K h_K^2 |v_h|_{3,K} \\
 &\quad + z_K^3 h_K^{-2} |v_h|_{1,K} + z_K^2 |v_h|_{2,K}) \\
 &\leq \hat{c} (\inf J)^{-\frac{1}{2}} [z_K^3 h_K^{-2} |v_h|_{1,K} + z_K^2 |v_h|_{2,K} + z_K h_K^2 |v_h|_{3,K}] \\
 |\hat{\varphi}|_{0,K} &\leq \hat{c} |\hat{w}_h|_{1,\hat{K}} \leq \hat{c} (\inf J)^{-\frac{1}{2}} h_K |w_h|_{1,K}
 \end{aligned}$$

d'où

$$|R_K(\hat{\varphi} \hat{\varphi})| \leq \hat{c} (\inf J)^{-1} h_K (z_K^3 h_K^{-2} |v_h|_{1,K} + z_K^2 |v_h|_{2,K} + z_K h_K^2 |v_h|_{3,K}) |w_h|_{1,K}$$

$$|R_K(\hat{\varphi} \hat{\varphi})| \leq \hat{c} (z_K^3 h_K^{-3} |v_h|_{1,K} + z_K^2 h_K^{-1} |v_h|_{2,K} + z_K h_K |v_h|_{3,K}) |w_h|_{1,K}.$$

Il résulte que :

(3-169) $|\hat{E}_K(\hat{\varphi} \hat{\varphi})| \leq \hat{c} (z_K^3 h_K^{-5} |v_h|_{1,K} + z_K^2 h_K^{-3} |v_h|_{2,K} + z_K h_K^{-1} |v_h|_{3,K}) |w_h|_{1,K}$

C. Q. F. D.

Remarque (3-7) :

$$\hat{E}_K \left(\widehat{\frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2}} \widehat{\frac{\partial^2 w_h}{\partial y^2}} J \right) \text{ et } \hat{E}_K \left(\widehat{\frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2}} \widehat{\frac{\partial^2 w_h}{\partial y^2}} J \right)$$

se majorent de la même manière que $\hat{E}_K \left(\widehat{\frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2}} \widehat{\frac{\partial^2 w_h}{\partial x^2}} J \right)$.

Il résulte le lemme suivant, en combinant les lemmes (3-5) à (3-15).

Lemme (3-16) :

Supposons les hypothèses (H_1) , (H_2) , (H_3) vérifiées.

Alors, il existe une constante c indépendante de h telle que :

$$\begin{aligned} \hat{E}_K \left(\widehat{\frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2}} \widehat{\frac{\partial^2 w_h}{\partial y^2}} J \right) &\leq c \left[(h |v_h|_{3,K} + z h^{-1} |v_h|_{2,K} + z^2 h^{-3} |v_h|_{1,K}) \right. \\ (3-170) \quad &\quad \left. (|w_h|_{2,K} + z h^{-2} |w_h|_{1,K}) \right. \\ &\quad \left. + (z h^{-1} |v|_{3,K} + z^2 h^{-3} |v|_{2,K} + z^3 h^{-5} |v_h|_{1,K}) |w_h|_{1,K} \right] \\ &\text{pour } 1 \leq i, j \leq 2. \end{aligned}$$

Théorème (3-6) :

Nous supposons les hypothèses (H_1) , (H_2) , (H_3) vérifiées.

Alors, il existe une constante c indépendante de h telle que :

$$\begin{aligned} (3-171) \quad &\sup_{w_h \in V_h} \frac{|a_h(v_h, w_h) - \tilde{a}_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_h} \\ &\leq c \left[(h + z h^{-1}) |v_h|_{3,\Omega} + (z h^{-1} + z^2 h^{-3}) |v_h|_{2,\Omega} + (z^2 h^{-3} + z^3 h^{-5}) |v_h|_{1,\Omega} \right] \\ &\text{pour tout } v_h \in V_h, \text{ avec } z = \max_{K \in \tau_h} z_K, \quad h = \max_{K \in \tau_h} h_K. \end{aligned}$$

Démonstration :

Etape 1 :

Nous avons $E_K(\delta_{ii} v_h \delta_{jj} w_h) = \hat{E}_K(\widehat{\delta_{ii} v_h} \widehat{\delta_{jj} w_h} J)$. En sommant sur tous les quadrilatères convexes du maillage, l'inégalité (3-170) donne :

$$(3-172) \quad \sum_{K \in \tau_h} |E_K(\delta_{ii} v_h \delta_{jj} w_h)| \leq c [(h |v_h|_{3,\Omega} + z h^{-1} |v_h|_{2,\Omega} + z^2 h^{-3} |v_h|_{1,\Omega}) (\|w_h\|_h + z h^{-2} |w_h|_{1,\Omega}) + (z h^{-1} |v_h|_{3,\Omega} + z^2 h^{-3} |v_h|_{2,\Omega} + z^3 h^{-5} |v_h|_{1,\Omega}) \|w_h\|_{1,\Omega}]$$

Etape 2 :

Pour $z h^{-2}$ petit devant 1, on a (lemme (2-1)) :

$$\|w_h\|_{1,\Omega} \leq c \|w_h\|_h.$$

Il résulte alors :

$$(3-173) \quad \begin{aligned} & \sum_{K \in \tau_h} |E_K(\delta_{ii} v_h \delta_{jj} w_h)| \\ & \leq c [(h + z h^{-1}) |v_h|_{3,\Omega} + (z h^{-1} + z^2 h^{-3}) |v_h|_{2,\Omega} + (z^2 h^{-3} + z^3 h^{-5}) |v_h|_{1,\Omega}] \|w_h\|_h \\ & |a_h(v_h, w_h) - \tilde{a}_h(v_h, w_h)| \leq \sum_{K \in \tau_h} |E_K(\delta_{ii} v_h \delta_{jj} w_h)| \\ & \leq c [(h + z h^{-1}) |v_h|_{3,\Omega} + (z h^{-1} + z^2 h^{-3}) |v_h|_{2,\Omega} + (z^2 h^{-3} + z^3 h^{-5}) |v_h|_{1,\Omega}] \|w_h\|_h \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 (3-174) \quad & \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a_h(v_h, w_h) - \tilde{a}_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_h} \\
 & \leq c[(h + zh^{-1})|v_h|_{3,\Omega} + (zh^{-1} + z^2h^{-3})|v_h|_{2,\Omega} + (z^2h^{-3} + z^3h^{-5})|v_h|_{1,\Omega}].
 \end{aligned}$$

Remarque (3-8) :

Pour $z = 0$, c'est-à-dire dans le cas affine, on retrouve le résultat du théorème (3-4).

Remarque (3-9) :

Tous les coefficients qui apparaissent dans la majoration précédente sont d'ordre h .

- CHAPITRE 4 -

FORMATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE ET DU SECOND MEMBRE
=====

DU SYSTEME - LEURS TECHNIQUES DE CALCUL
=====

L'approximation par éléments finis du problème continu nous a conduit à trouver une solution approchée du problème discret suivant :

$$(4-1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que} \\ a_h(u_h, v_h) = (f, v_h) \text{ pour tout } v_h \in V_h \end{array} \right.$$

où V_h est l'espace de dimension finie.

On s'intéresse spécialement au problème de la plaque encastree, donne par le problème biharmonique :

$$(4-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ telle que} \\ \Delta^2 u = f \text{ dans } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right.$$

où la forme bilinéaire $a_h(., .)$ et la forme linéaire $(f, .)$ sont respectivement

$$(4-3) \quad a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in \tau_h} \int_K \Delta u_h \Delta v_h \, dx \, dy$$

et

$$(4-4) \quad (f, v_h) = \sum_{K \in \tau_h} \int_K f v_h \, dx \, dy.$$

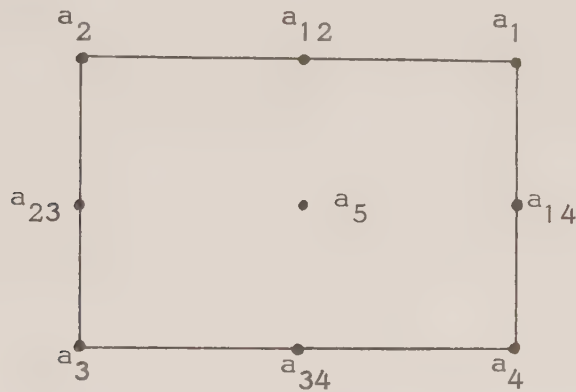
- QUELQUES DEFINITIONS ET NOTATIONS

- Un noeud est un point support de un ou de plusieurs degrés de liberté.

- Un "point" et ses caractéristiques associées (coordonnées, tangentes aux côtés courbes, ...) servent à définir géométriquement l'élément fini c'est-à-dire l'interpolation entre éléments de référence $\hat{K}$ et K .

Dans certains cas, les "points" et les noeuds sont confondus. Par exemple : si l'interpolation est de Lagrange de degré 1, sommet, noeud, "point" coïncident, le cas d'interpolation de Lagrange de degré 2 sur un élément K détermine :

- 9 noeuds - Les 4 sommets, les 4 milieux de côtés et le centre a_5
- 4 "points" - Les 4 sommets.



- [] désigne une matrice.

- Toute numérotation ou indice ou caractéristique du maillage globale est surmonté d'un $\sim$.

- $\tilde{\eta}$ = est l'ensemble des noeuds du maillage, de cardinal $\tilde{N}$ d'élément général $\tilde{n}_j$, en abrégé parfois $\tilde{j}$ et cette dernière notation sera souvent utilisée lorsqu'il n'y a pas d'inconvénient.

- $\tilde{j} \in \tilde{\eta}$ signifie : $\tilde{j}$ est le numéro de l'un des noeuds de $\tilde{\eta}$.

- Toute fonction définie sur l'élément de référence $\hat{K}$ est surmontée d'un $\hat{\cdot}$.

2 - CALCUL PAR LIGNE DE LA MATRICE DE RIGIDITE

Exhibons une base de V_h , espace vectoriel de dimension finie.

Avec δ_{ij} symbole de Kronecker valant 1 si $i = j$, 0 sinon. Définissons, pour $\tilde{i} \in \tilde{\mathcal{N}}$, la fonction de base $w_{\tilde{i}}$ de V_h par $w_{\tilde{i}}(n_{\tilde{j}}) = \delta_{\tilde{i}\tilde{j}} \quad \forall \tilde{j} \in \tilde{\mathcal{N}}$ dans le cas d'interpolation de Lagrange.

Mais d'une façon plus générale, si nous notons $\Sigma_h = \{\Phi_{\tilde{j},h}\}$

l'ensemble des degrés de liberté, les fonctions de base $w_{\tilde{i}}$ de l'espace V_h sont définies de la manière suivante :

$$(4-5) \quad \Phi_{\tilde{j},h}(w_{\tilde{i}}) = \delta_{\tilde{i}\tilde{j}} \quad \forall \tilde{i}.$$

Toute fonction $v_h \in V_h$ s'écrit alors :

$$(4-6) \quad v_h(x, y) = \sum_{\tilde{j}} \Phi_{\tilde{j},h}(v_h) w_{\tilde{j}}(x, y)$$

et

$$(4-7) \quad u_h(x, y) = \sum_{\tilde{i}} \Phi_{\tilde{i},h}(u_h) w_{\tilde{i}}(x, y).$$

Dans certains cas, on notera $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Le système linéaire à résoudre s'écrit alors :

$$(4-8) \quad \sum_{K \in \tau_h} \sum_{m,n=1}^2 \int_K \frac{\partial^2 u_h}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 v_h}{\partial x_m^2} dx = \sum_{K \in \tau_h} \int_K f v_h dx \quad \forall v_h \in V_h,$$

soit encore :

$$(4-9) \quad \sum_{K \in \tau_h} \sum_{m,n=1}^2 \int_K \frac{\partial^2 u_h}{\partial x_n^2} \left(\sum_{\tilde{j}} \Phi_{\tilde{j},h}(v_h) \frac{\partial^2 w_{\tilde{j}}}{\partial x_m^2}(x) \right) dx \\ = \sum_{K \in \tau_h} \int_K \sum_{\tilde{j}} \Phi_{\tilde{j},h}(v_h) (f w_{\tilde{j}})(x) dx \quad \text{pour tout } v_h \in V_h.$$

En remplaçant u_h par sa valeur, le système s'écrit :

$$\begin{aligned}
 (4-10) \quad & \sum_{K \in \tau_h} \sum_{m,n=1}^2 \int_K \sum_{\tilde{\gamma}, \tilde{j}} \Phi_{\tilde{\gamma},h}(u_n) \Phi_{\tilde{j},h}(v_h) \frac{\partial^2 w_{\tilde{\gamma}}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 w_{\tilde{j}}}{\partial x_m^2} dx \\
 &= \sum_{K \in \tau_h} \int_K \sum_{\tilde{\gamma}} \Phi_{\tilde{\gamma},h}(v_h) (f w_{\tilde{\gamma}})(x) dx \quad \text{pour tout } v_h \in V_h
 \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned}
 (4-11) \quad & \sum_{K \in \tau_h} \sum_{m,n=1}^2 \int_K \sum_{\tilde{\gamma}} \Phi_{\tilde{\gamma},h}(u_n) \frac{\partial^2 w_{\tilde{\gamma}}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 w_{\tilde{j}}}{\partial x_m^2} dx \\
 &= \sum_{K \in \tau_h} \int_K f w_{\tilde{j}}(x) dx \quad \text{pour tout } \tilde{j}.
 \end{aligned}$$

Soit $\eta = \{1, 2, 3, 4\}$. Le quadrilatère K contient quatre sommets numérotés localement de 1 à 4 et notés $i \in \eta$. A chacun d'eux correspond un numéro de sommet global appartenant à $\tilde{\eta}$ et noté $\tilde{\gamma} \in \tilde{\eta}$. Sur K l'application $\sim : i \rightarrow \tilde{\gamma}$ est injective donc bijective sur son image.

De plus, comme $\Phi_{i,h}(w_{\tilde{\gamma}}) = \delta_{\tilde{\gamma}\tilde{j}}$ et $w_{\tilde{j}} \in V_h$

$$(4-12) \quad \begin{cases} \text{si } \tilde{j} \notin K & w_{\tilde{j}}|_K = 0 \\ \text{si } \tilde{j} \in K & w_{\tilde{j}}|_K = p_j \text{ où } p_j \text{ est le } j^{\text{ème}} \text{ polynôme de base sur } K. \end{cases}$$

Pour tout K , nous définissons les deux fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
 (4-13) \quad & \chi_{\tilde{\gamma}}^K \text{ la fonction} = 0 \text{ si } n_{\tilde{\gamma}} \notin K \\
 & = 1 \text{ si } n_{\tilde{\gamma}} \in K
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4-14) \quad & \chi_{\tilde{\gamma}\tilde{j}}^K \text{ la fonction} = 0 \text{ si } n_{\tilde{\gamma}} \text{ ou } n_{\tilde{j}} \notin K \\
 & = 1 \text{ si } n_{\tilde{\gamma}} \text{ et } n_{\tilde{j}} \in K.
 \end{aligned}$$

Pour notre élément fini, c'est-à-dire le rectangle d'Adini, à chaque sommet = noeud correspond trois degrés de liberté : la valeur ponctuelle de la fonction $v_h \in V_h$ notée $v(\tilde{\gamma})$, la valeur de la dérivée première suivant x

notée $v_x(\tilde{\gamma})$ et la valeur de la dérivée première suivant y notée $v_y(\tilde{\gamma})$.

Si nous notons $\{(\varphi_{\tilde{\gamma}})_{\tilde{\gamma} \in \tilde{N}}, (\varphi_{\tilde{\gamma}_x})_{\tilde{\gamma} \in \tilde{N}}, (\varphi_{\tilde{\gamma}_y})_{\tilde{\gamma} \in \tilde{N}}\}$ la base de l'espace V_h construit à partir de l'élément fini d'Adini, nous aurons pour tout $v_h \in V_h$,

$$(4-15) \quad v_h(x, y) = \sum_{\tilde{\gamma} \in \tilde{N}} v(\tilde{\gamma}) \varphi_{\tilde{\gamma}}(x, y) + \sum_{\tilde{\gamma} \in \tilde{N}}^h v_x(\tilde{\gamma}) \varphi_{\tilde{\gamma}_x}(x, y) + \sum_{\tilde{\gamma} \in \tilde{N}} v_y(\tilde{\gamma}) \varphi_{\tilde{\gamma}_y}(x, y)$$

et

$$(4-16) \quad u_h(x, y) = \sum_{\tilde{\gamma} \in \tilde{N}} u(\tilde{\gamma}) \varphi_{\tilde{\gamma}}(x, y) + \sum_{\tilde{\gamma} \in \tilde{N}} u_x(\tilde{\gamma}) \varphi_{\tilde{\gamma}_x}(x, y) + \sum_{\tilde{\gamma} \in \tilde{N}} u_y(\tilde{\gamma}) \varphi_{\tilde{\gamma}_y}(x, y)$$

le problème approché, encore appelé problème (p_h) :

$$(4-17) \quad \begin{cases} \text{trouver } u_h \in V_h \text{ telle que} \\ a_h(u_h, v_h) = (f, v_h) \text{ pour tout } v_h \in V_h \end{cases}$$

est équivalent à la résolution d'un système linéaire,

$$(4-18) \quad \begin{aligned} a_h(u_h, v_h) &= \sum_{\tilde{\gamma} \in \tilde{N}} v(\tilde{\gamma}) a_h(u_h, \varphi_{\tilde{\gamma}}) + \sum_{\tilde{\gamma} \in \tilde{N}} v_x(\tilde{\gamma}) a_h(u_h, \varphi_{\tilde{\gamma}_x}) \\ &\quad + \sum_{\tilde{\gamma} \in \tilde{N}} v_y(\tilde{\gamma}) a_h(u_h, \varphi_{\tilde{\gamma}_y}) \\ &= \sum_{\tilde{\gamma} \in \tilde{N}} v(\tilde{\gamma}) (f, \varphi_{\tilde{\gamma}}) + \sum_{\tilde{\gamma} \in \tilde{N}} v_x(\tilde{\gamma}) (f, \varphi_{\tilde{\gamma}_x}) + \sum_{\tilde{\gamma} \in \tilde{N}} v_y(\tilde{\gamma}) (f, \varphi_{\tilde{\gamma}_y}), \end{aligned}$$

pour tout $v(\tilde{\gamma}), v_x(\tilde{\gamma}), v_y(\tilde{\gamma}) \in \mathbb{R}$.

Ce qui est encore équivalent à trouver,

$$\{u(\tilde{\gamma}), u_x(\tilde{\gamma}), u_y(\tilde{\gamma})\}_{\tilde{\gamma} \in \tilde{N}} \text{ tels que :}$$

$$(4-19) \quad \begin{cases} a_h(u_h, \varphi_{\tilde{\gamma}}) = (f, \varphi_{\tilde{\gamma}}) \\ a_h(u_h, \varphi_{\tilde{\gamma}_x}) = (f, \varphi_{\tilde{\gamma}_x}) \\ a_h(u_h, \varphi_{\tilde{\gamma}_y}) = (f, \varphi_{\tilde{\gamma}_y}) \end{cases} \text{ pour tout } \tilde{\gamma} \in \tilde{N}$$

Remarque (4-1) :

- Nous savons que $a_h(w_{\tilde{J}}, w_{\tilde{I}}) = 0$ sauf si $\tilde{J}, \tilde{I}$ appartiennent à un même quadrilatère K de τ_h ie

$$(4-20) \quad a_h(w_{\tilde{J}}, w_{\tilde{I}}) = 0, \text{ si } \text{supp } w_{\tilde{J}} \cap \text{supp } w_{\tilde{I}} = \emptyset.$$

- Nous traitons le maillage constitué de carrés égaux.

- La transformation bijective F_K est donnée par (3-26)

$$(4-21) \quad F_K(\hat{x}) = B \hat{x} + b \quad \text{où } B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} x_{21} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} y_{21} \end{bmatrix}$$

et $x_{21} = x_2 - x_1$, $y_{21} = y_2 - y_1$, (x_i, y_i) représentent les coordonnées des sommets A_i de K $i = 1, 2, 3, 4$

$$\text{soit } \Delta = \frac{1}{4} x_{21}^2 = \frac{1}{4} y_{21}^2.$$

En utilisant les règles de dérivation du produit, nous avons en général, pour tout $x \in \Omega \in \mathbb{R}^n$, $\xi_1 \in \mathbb{R}^n$, $\xi_2 \in \mathbb{R}^n$ et pour tout

$$(\hat{p} : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}) \rightarrow (p = \hat{p} \circ F^{-1} : \Omega \rightarrow \mathbb{R})$$

$$(4-22) \quad D^2 \hat{p}(\hat{x}) \cdot (\xi_1, \xi_2) = Dp(x) \cdot (D^2 F(\hat{x}) \cdot (\xi_1, \xi_2)) \\ + D^2 p(x) (DF(\hat{x}) \cdot \xi_1, DF(\hat{x}) \cdot \xi_2)$$

pour tout $x = F(\hat{x}) \in \Omega$.

L'expression (4-22) s'écrit en dimension deux avec (4-21)

$$(4-23) \quad [D^2 \hat{p}(\hat{x}, \hat{y})] = {}^t B [D^2 p(x, y)] B = B [D^2 p(x, y)] B, \text{ car } {}^t B = B.$$

Par conséquent,

$$[D^2 p(x, y)] = B^{-1} [D^2 \hat{p}(\hat{x}, \hat{y})] B^{-1}$$

où

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} y_{21} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} x_{21} \end{bmatrix} / \Delta$$

(4-24)

$$[D^2 p(x, y)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2}(x, y) & \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2}(x, y) \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x_2 \partial x_1}(x, y) & \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}(x, y) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4\Delta^2} \begin{bmatrix} y_{21} & 0 \\ 0 & x_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \hat{p}(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}_1^2} & \frac{\partial^2 \hat{p}(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}_1 \partial \hat{x}_2} \\ \frac{\partial^2 \hat{p}(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}_2 \partial \hat{x}_1} & \frac{\partial^2 \hat{p}(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{21} & 0 \\ 0 & x_{21} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4\Delta^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \hat{p}(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}_1^2} (y_{21})^2 & \frac{\partial^2 \hat{p}(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}_1 \partial \hat{x}_2} x_{21} y_{21} \\ \frac{\partial^2 \hat{p}(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}_2 \partial \hat{x}_1} x_{21} y_{21} & \frac{\partial^2 \hat{p}(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}_2^2} (x_{21})^2 \end{bmatrix}$$

Par identification des deux membres, nous aurons :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2}(x, y) = \frac{1}{4\Delta^2} \frac{\partial^2 \hat{p}(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}_1^2} (y_{21})^2$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}(x, y) = \frac{1}{4\Delta^2} \frac{\partial^2 \hat{p}(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}_2^2} (x_{21})^2$$

$$\frac{\partial^2 p(x, y)}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 p(x, y)}{\partial x_2^2} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{y_{21} x_{21}}{4} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{p}(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}_1^2} \frac{\partial^2 \hat{p}(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}_2^2}$$

D'après la remarque (4-1), nous obtenons :

$$(4-25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 p(x, y)}{\partial x_1^2} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial^2 \hat{p}(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}_1^2} \\ \frac{\partial^2 p(x, y)}{\partial x_2^2} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial^2 \hat{p}(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}_2^2} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2}(x, y) \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}(x, y) = \frac{1}{\Delta^2} \frac{\partial^2 \hat{p}(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}_1^2} \frac{\partial^2 \hat{p}(\hat{x}, \hat{y})}{\partial \hat{x}_2^2} \end{array} \right.$$

Dans la suite, nous adoptons une notation des indices muets pour une somme double, nous écrivons :

$$(4-26) \quad \sum_{m, n=1}^2 \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_m^2} = \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_m^2}.$$

Le système linéaire (4-19), avec (4-12) et (4-26) devient :

$$(4-26)' \quad \begin{aligned} a_h(u_h, \varphi_{\tilde{\gamma}}) &= \sum_{\tilde{\gamma} \in \tilde{N}} \sum_{K \in \tau_h} \chi_{\tilde{\gamma}}^K \left[\int_K (u(\tilde{\gamma})) \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_m^2} \right. \\ &\quad \left. + u_x(\tilde{\gamma}) \frac{\partial^2 \varphi_{jx}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_m^2} + u_y(\tilde{\gamma}) \frac{\partial^2 \varphi_{jy}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_m^2} \right] dx \\ &= \sum_{K \in \tau_h} \chi_{\tilde{\gamma}}^K \int_K f \varphi_i \, dx \quad \text{pour tout } \tilde{\gamma} \in \tilde{N}. \end{aligned}$$

$$(4-27) \quad \begin{aligned} a_h(u_h, \varphi_{\tilde{\gamma}_x}) &= \sum_{\tilde{\gamma} \in \tilde{N}} \sum_{K \in \tau_h} \chi_{\tilde{\gamma}}^K \left[\int_K (u(\tilde{\gamma})) \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_{ix}}{\partial x_m^2} \right. \\ &\quad \left. + u_x(\tilde{\gamma}) \frac{\partial^2 \varphi_{jx}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_{ix}}{\partial x_m^2} + u_y(\tilde{\gamma}) \frac{\partial^2 \varphi_{jy}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_{ix}}{\partial x_m^2} \right] dx \\ &= \sum_{K \in \tau_h} \chi_{\tilde{\gamma}}^K \int_K f \varphi_{ix} \, dx \quad \text{pour tout } \tilde{\gamma} \in \tilde{N}. \end{aligned}$$

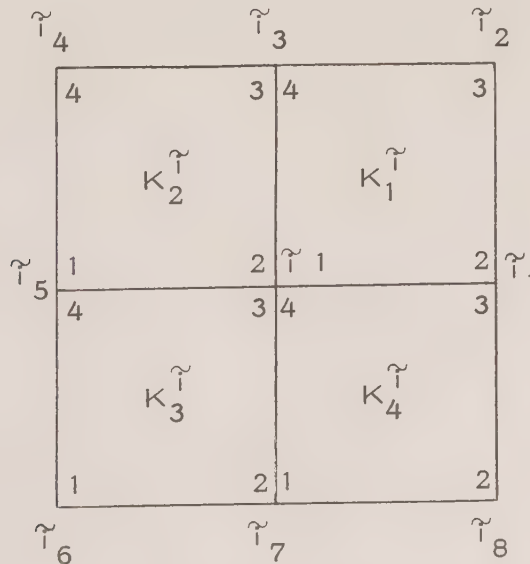
$$\begin{aligned}
 (4-28) \quad a_h(u_h, \varphi_{\tilde{\gamma}}) &= \sum_{\tilde{\gamma} \in \tilde{N}} \sum_{K \in \tau_h} \chi_{\tilde{\gamma}}^K \left[\int_K \left(u(\tilde{\gamma}) \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_{iy}}{\partial x_m^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + u_x(\tilde{\gamma}) \frac{\partial^2 \varphi_{jx}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_{iy}}{\partial x_m^2} + u_y(\tilde{\gamma}) \frac{\partial^2 \varphi_{jy}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_{iy}}{\partial x_m^2} \right) dx \right] \\
 &= \sum_{K \in \tau_h} \chi_{\tilde{\gamma}}^K \int_K f \varphi_{iy} dx \quad \text{pour tout } \tilde{\gamma} \in \tilde{N}.
 \end{aligned}$$

Remarque (4-2) :

Pour un noeud $\tilde{\gamma}$ donné du maillage, les équations (4-26)', (4-27), (4-28) donnent respectivement les $3\tilde{\gamma}-2$, $3\tilde{\gamma}-1$, $3\tilde{\gamma}$ lignes du système linéaire (4-19).

3 - CALCUL DE $3\tilde{\gamma}-2$, $3\tilde{\gamma}-1$, $3\tilde{\gamma}$ LIGNES DU SYSTEME LINEAIRE (4-19) POUR UN NOEUD $\tilde{\gamma}$ DONNE DU MAILLAGE

Le noeud $\tilde{\gamma}$ engendre quatre carrés notés $K_j^{\tilde{\gamma}}$, $j = 1, 2, 3, 4$ du maillage

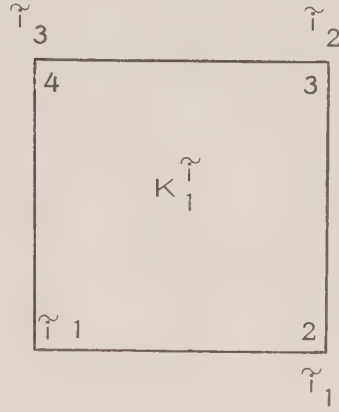


où $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3, \tilde{\gamma}_4, \tilde{\gamma}_5, \tilde{\gamma}_6, \tilde{\gamma}_7, \tilde{\gamma}_8$ sont des noeuds voisins du noeud $\tilde{\gamma}$

qui appartiennent aux carrés $K_j^{\tilde{\Gamma}}$, $j = 1, 2, 3, 4$ et $1, 2, 3, 4$ représentent la numérotation locale pour les sommets de chaque $K_j^{\tilde{\Gamma}}$, $j = 1, 2, 3, 4$.

a) Formation du premier membre du 3^{ème} - 2 ligne du système (4-19) :

- Intéressons-nous à $K_1^{\tilde{\Gamma}}$



La contribution de $a_h(u_h, \varphi_{\tilde{\Gamma}})$ du système linéaire (4-19) au carré $K_1^{\tilde{\Gamma}}$ s'écrit en tenant compte de (4-26)' et de la numérotation locale suivante :

$$\tilde{\Gamma} \rightarrow 1 ; \tilde{\Gamma}_1 \rightarrow 2 ; \tilde{\Gamma}_2 \rightarrow 3 ; \tilde{\Gamma}_3 \rightarrow 4 \text{ et } \tilde{\Gamma} \rightarrow j.$$

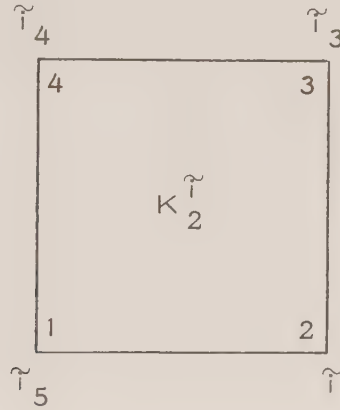
$$(4-29) \quad a_h(u_h, \varphi_{\tilde{\Gamma}}) = u(\tilde{\Gamma}) \int_{K_1^{\tilde{\Gamma}}} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_m^2} dx + u_x(\tilde{\Gamma}) \int_{K_1^{\tilde{\Gamma}}} \frac{\partial^2 \varphi_{1x}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_m^2} dx$$

$$+ u_y(\tilde{\Gamma}) \int_{K_1^{\tilde{\Gamma}}} \frac{\partial^2 \varphi_{1y}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_m^2} dx + u(\tilde{\Gamma}_1) \int_{K_1^{\tilde{\Gamma}}} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_m^2} dx$$

$$+ u_x(\tilde{\Gamma}_1) \int_{K_1^{\tilde{\Gamma}}} \frac{\partial^2 \varphi_{2x}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_m^2} dx + u_y(\tilde{\Gamma}_1) \int_{K_1^{\tilde{\Gamma}}} \frac{\partial^2 \varphi_{2y}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_m^2} dx$$

$$\begin{aligned}
 & + u(\tilde{\gamma}_2) \int_{K_1} \tilde{\gamma}_1 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_m^2} dx + u_x(\tilde{\gamma}_2) \int_{K_1} \tilde{\gamma}_1 \frac{\partial^2 \varphi_{3x}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_m^2} dx \\
 & + u_y(\tilde{\gamma}_2) \int_{K_1} \tilde{\gamma}_1 \frac{\partial^2 \varphi_{3y}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_m^2} dx + u(\tilde{\gamma}_3) \int_{K_1} \tilde{\gamma}_1 \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_m^2} dx \\
 & + u_x(\tilde{\gamma}_3) \int_{K_1} \tilde{\gamma}_1 \frac{\partial^2 \varphi_{4x}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_m^2} dx + u_y(\tilde{\gamma}_3) \int_{K_1} \tilde{\gamma}_1 \frac{\partial^2 \varphi_{4y}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_m^2} dx.
 \end{aligned}$$

- Intéressons-nous à $K_2^{\tilde{\gamma}}$



En numérotation locale, on a la correspondance suivante :

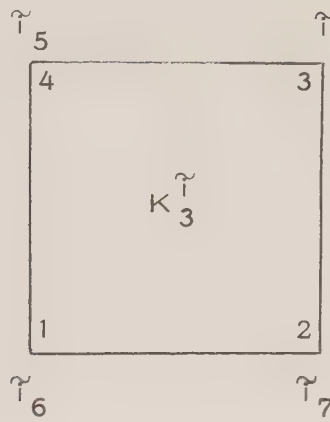
$$\tilde{\gamma} \rightarrow 2 ; \tilde{\gamma}_3 \rightarrow 3 ; \tilde{\gamma}_4 \rightarrow 4 ; \tilde{\gamma}_5 \rightarrow 1 .$$

La contribution de $a_h(u_h, \varphi_{\tilde{\gamma}})$ à $K_2^{\tilde{\gamma}}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
 (4-30) \quad a_h(u_h, \varphi_{\tilde{\gamma}}) &= u(\tilde{\gamma}) \int_{K_2} \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_m^2} dx + u_x(\tilde{\gamma}) \int_{K_2} \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_{2x}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_m^2} dx \\
 &+ u_y(\tilde{\gamma}) \int_{K_2} \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_{2y}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_m^2} dx + u(\tilde{\gamma}_3) \int_{K_2} \tilde{\gamma}_1 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_m^2} dx \\
 &+ u_x(\tilde{\gamma}_3) \int_{K_2} \tilde{\gamma}_1 \frac{\partial^2 \varphi_{3x}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_m^2} dx + u_y(\tilde{\gamma}_3) \int_{K_2} \tilde{\gamma}_1 \frac{\partial^2 \varphi_{3y}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_m^2} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + u(\tilde{\gamma}_4) \int_{K_2} \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_m^2} dx + u_x(\tilde{\gamma}_4) \int_{K_2} \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_{4x}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_m^2} dx \\
 & + u_y(\tilde{\gamma}_4) \int_{K_2} \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_{4y}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_m^2} dx + u(\tilde{\gamma}_5) \int_{K_2} \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_m^2} dx \\
 & + u_x(\tilde{\gamma}_5) \int_{K_2} \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_{1x}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_m^2} dx + u_y(\tilde{\gamma}_5) \int_{K_2} \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_{1y}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_m^2} dx.
 \end{aligned}$$

- Intéressons-nous à $K_3^{\tilde{\gamma}}$



La correspondance en numérotation locale est :

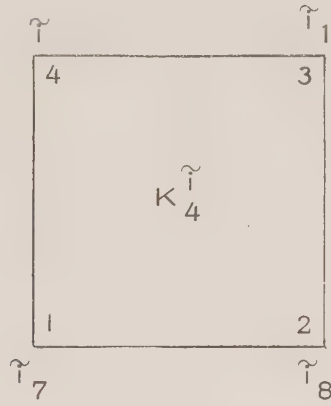
$$\tilde{\gamma} \rightarrow 3 ; \tilde{\gamma}_5 \rightarrow 4 ; \tilde{\gamma}_6 \rightarrow 1 ; \tilde{\gamma}_7 \rightarrow 2.$$

La contribution de $a_h(u_h, \varphi_{\tilde{\gamma}})$ au carré $K_3^{\tilde{\gamma}}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
 (4-31) \quad a_h(u_h, \varphi_{\tilde{\gamma}}) &= u(\tilde{\gamma}) \int_{K_3} \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_m^2} dx + u_x(\tilde{\gamma}) \int_{K_3} \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_{3x}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_m^2} dx \\
 &+ u_y(\tilde{\gamma}) \int_{K_3} \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_{3y}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_m^2} dx + u(\tilde{\gamma}_5) \int_{K_3} \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_m^2} dx \\
 &+ u_x(\tilde{\gamma}_5) \int_{K_3} \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_{4x}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_m^2} dx + u_y(\tilde{\gamma}_5) \int_{K_3} \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_{4y}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_m^2} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + u(\tilde{\gamma}_6) \int_{K_3} \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_m^2} dx + u_x(\tilde{\gamma}_6) \int_{K_3} \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_{1x}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_m^2} dx \\
 & + u_y(\tilde{\gamma}_6) \int_{K_3} \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_{1y}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_m^2} dx + u(\tilde{\gamma}_7) \int_{K_3} \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_m^2} dx \\
 & + u_x(\tilde{\gamma}_7) \int_{K_3} \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_{2x}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_m^2} dx + u_y(\tilde{\gamma}_7) \int_{K_3} \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_{2y}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_m^2} dx.
 \end{aligned}$$

- En dernier lieu, intéressons-nous à $K_4^{\tilde{\gamma}}$



On aura la correspondance suivante en numérotation locale :

$$\tilde{\gamma} \rightarrow 4 ; \tilde{\gamma}_7 \rightarrow 1 ; \tilde{\gamma}_8 \rightarrow 2 ; \tilde{\gamma}_1 \rightarrow 3.$$

La contribution de $a_h(u_h, \varphi_{\tilde{\gamma}})$ au carré $K_4^{\tilde{\gamma}}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
 (4-32) \quad a_h(u_h, \varphi_{\tilde{\gamma}}) &= u(\tilde{\gamma}) \int_{K_4} \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x_m^2} dx + u_x(\tilde{\gamma}) \int_{K_4} \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_{4x}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x_m^2} dx \\
 &+ u_y(\tilde{\gamma}) \int_{K_4} \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_{4y}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x_m^2} dx + u(\tilde{\gamma}_7) \int_{K_4} \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x_m^2} dx \\
 &+ u_x(\tilde{\gamma}_7) \int_{K_4} \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_{1x}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x_m^2} dx + u_y(\tilde{\gamma}_7) \int_{K_4} \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_{1y}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x_m^2} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + u(\tilde{\gamma}_8) \int_K \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x_m^2} dx + u_x(\tilde{\gamma}_8) \int_K \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_{2x}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x_m^2} dx \\
 & + u_y(\tilde{\gamma}_8) \int_K \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_{2y}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x_m^2} dx + u(\tilde{\gamma}_1) \int_K \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x_m^2} dx \\
 & + u_x(\tilde{\gamma}_1) \int_K \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_{3x}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x_m^2} dx + u_y(\tilde{\gamma}_1) \int_K \tilde{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_{3y}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x_m^2} dx.
 \end{aligned}$$

Alors le premier membre du 3^e ligne du système (4-19) est la contribution $a_h(u_h, \varphi_{\tilde{\gamma}})$ aux quatre carrés $K_j^{\tilde{\gamma}}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Ce n'est autre que la somme des expressions (4-29) à (4-32).

Remarque (4-2) :

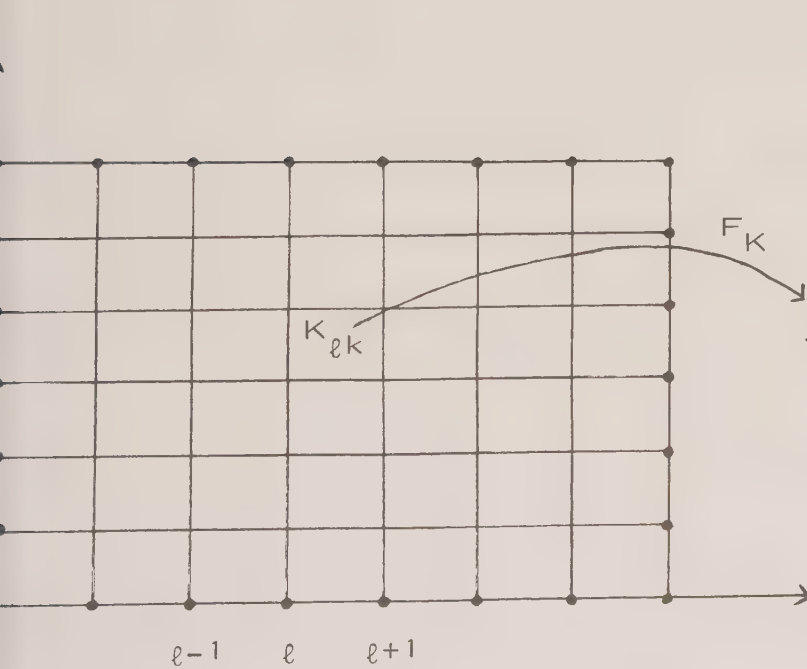


figure 1

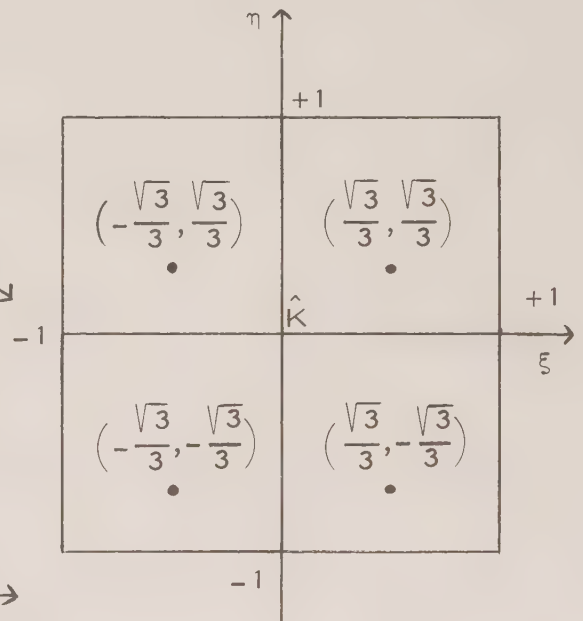


figure 2

• = les 4 points de Gauss

C'est la triangulation du domaine en rectangles égaux.

Nous allons nous intéresser uniquement aux noeuds internes du maillage, car les noeuds frontières n'interviennent pas à cause des conditions aux limites sur la frontière du domaine Ω du problème (4-2).

b) Formation du second membre du 3^e - 2 ligne du système (4-19) :

$$(4-33) \quad (f, \varphi_{\tilde{T}}) = \sum_{K \in \tau_h} \chi_{\tilde{T}}^K \int_K f \varphi_{\tilde{T}} dx.$$

Remarque (4-3) :

L'intégrale $\int_K f \varphi_{\tilde{T}} dx$ ne peut être calculée exactement, donc on doit faire appel à l'intégration numérique. L'intégration numérique est prise aux quatre points de Gauss notés $\eta_{\ell, K}$ $\ell = 1, 2, 3, 4$.

L'expression (4-33) s'écrit alors :

$$(4-34) \quad (f, \varphi_{\tilde{T}}) = \sum_{K \in \tau_h} \chi_{\tilde{T}}^K \sum_{\ell=1}^4 \omega_{\ell, K} f(\eta_{\ell, K}) \varphi_{\tilde{T}}(\eta_{\ell, K}).$$

La contribution de l'expression (4-34) aux quatre carrés $K_j^{\tilde{T}}$, $j = 1, 2, 3, 4$ engendrant le noeud $\tilde{T}$ s'écrit :

$$(4-35) \quad (f, \varphi_{\tilde{T}}) = \sum_{\ell=1}^4 \omega_{\ell, K} f(\eta_{\ell, K}) \varphi_1(\eta_{\ell, K}) + \sum_{\ell=1}^4 \omega_{\ell, K} f(\eta_{\ell, K}) \varphi_2(\eta_{\ell, K}) \\ + \sum_{\ell=1}^4 \omega_{\ell, K} f(\eta_{\ell, K}) \varphi_3(\eta_{\ell, K}) + \sum_{\ell=1}^4 \omega_{\ell, K} f(\eta_{\ell, K}) \varphi_4(\eta_{\ell, K})$$

ce qui donne le deuxième membre du 3^e - 2 ligne du système (4-19).

4 - CALCUL SUR LE CARRE UNITE $\hat{K}$ DE REFERENCE

Le calcul du premier membre et du second membre de 3^e - 2 du système (4-19) sur les quadrilatères K du maillage s'avère difficile, sinon impossible en général, du fait que les fonctions de base de l'espace P_K ne sont pas polynomiales, mais dans le cas du maillage

à carrés égaux, le calcul se fait sur le carré de référence $\hat{K}$ à un facteur multiplicatif près.

Nous avons (1-16) :

$$P_K = \{p, p = \hat{p} \circ F_K^{-1}, \text{ pour tout } \hat{p} \in \hat{P}_K\}$$

$$\text{où } \hat{P}_K = \hat{P}_3 \cup \{\xi^3 \eta\} \cup \{\xi \eta^3\}$$

et les fonctions de base de $\hat{P}_K$ sont données par (1-20)

$$(4-36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\varphi}_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{3\xi}{2} + \frac{3\eta}{2} + 2\xi\eta - \frac{\xi^3}{2} - \frac{\eta^3}{2} - \frac{\xi^3\eta}{2} - \frac{\xi\eta^3}{2} \right) \\ \hat{\varphi}_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{3\xi}{2} + \frac{3\eta}{2} - 2\xi\eta + \frac{\xi^3}{2} - \frac{\eta^3}{2} + \frac{\xi^3\eta}{2} + \frac{\xi\eta^3}{2} \right) \\ \hat{\varphi}_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{3\xi}{2} - \frac{3\eta}{2} + 2\xi\eta + \frac{\xi^3}{2} + \frac{\eta^3}{2} - \frac{\xi^3\eta}{2} - \frac{\xi\eta^3}{2} \right) \\ \hat{\varphi}_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{3\xi}{2} - \frac{3\eta}{2} - 2\xi\eta - \frac{\xi^3}{2} + \frac{\eta^3}{2} + \frac{\xi^3\eta}{2} + \frac{\xi\eta^3}{2} \right). \end{array} \right.$$

Leurs dérivées secondes sont données par :

$$(4-37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_1}{\partial \xi^2}(\xi, \eta) = \frac{3}{4}(-\xi - \xi\eta) ; \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_1}{\partial \eta^2}(\xi, \eta) = \frac{3}{4}(-\eta - \xi\eta) \\ \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_2}{\partial \xi^2}(\xi, \eta) = \frac{3}{4}(\xi + \xi\eta) ; \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_2}{\partial \eta^2}(\xi, \eta) = \frac{3}{4}(-\eta + \xi\eta) \\ \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_3}{\partial \xi^2}(\xi, \eta) = \frac{3}{4}(\xi - \xi\eta) ; \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_3}{\partial \eta^2}(\xi, \eta) = \frac{3}{4}(\eta - \xi\eta) \\ \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_4}{\partial \xi^2}(\xi, \eta) = \frac{3}{4}(-\xi + \xi\eta) ; \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_4}{\partial \eta^2}(\xi, \eta) = \frac{3}{4}(\eta + \xi\eta) \end{array} \right.$$

$$(4-38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\phi}_{12}(\xi, \eta) = -\frac{1}{8} \left(1 + \xi + \eta + \xi\eta - \xi^2 - \xi^2\eta - \xi^3 - \xi^3\eta \right) = \hat{\phi}_{1x}(\xi, \eta) \\ \hat{\phi}_{21}(\xi, \eta) = \frac{1}{8} \left(1 - \xi + \eta - \xi\eta - \xi^2 - \xi^2\eta + \xi^3 + \xi^3\eta \right) = \hat{\phi}_{2x}(\xi, \eta) \\ \hat{\phi}_{34}(\xi, \eta) = \frac{1}{8} \left(1 - \xi - \eta + \xi\eta - \xi^2 + \xi^2\eta + \xi^3 - \xi^3\eta \right) = \hat{\phi}_{3x}(\xi, \eta) \\ \hat{\phi}_{43}(\xi, \eta) = -\frac{1}{8} \left(1 + \xi - \eta - \xi\eta - \xi^2 + \xi^2\eta - \xi^3 + \xi^3\eta \right) = \hat{\phi}_{4x}(\xi, \eta). \end{array} \right.$$

Leurs dérivées secondes sont données par :

$$(4-39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{12}}{\partial \xi^2}(\xi, \eta) = -\frac{1}{4} \left(-1 - \eta - 3\xi - 3\xi\eta \right) ; \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{12}}{\partial \eta^2}(\xi, \eta) = 0 \\ \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{21}}{\partial \xi^2}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \left(-1 - \eta + 3\xi + 3\xi\eta \right) ; \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{21}}{\partial \eta^2}(\xi, \eta) = 0 \\ \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{34}}{\partial \xi^2}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \left(-1 + \eta + 3\xi - 3\xi\eta \right) ; \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{34}}{\partial \eta^2}(\xi, \eta) = 0 \\ \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{43}}{\partial \xi^2}(\xi, \eta) = -\frac{1}{4} \left(-1 + \eta + 3\xi - 3\xi\eta \right) ; \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{43}}{\partial \eta^2}(\xi, \eta) = 0. \end{array} \right.$$

$$(4-40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\phi}_{14}(\xi, \eta) = -\frac{1}{8} \left(1 + \xi + \eta - \eta^2 - \eta^2\xi - \eta^3 - \xi\eta^3 \right) = \hat{\phi}_{1y}(\xi, \eta) \\ \hat{\phi}_{41}(\xi, \eta) = \frac{1}{8} \left(1 + \xi - \eta - \xi\eta - \eta^2 - \eta^2\xi + \eta^3 + \xi\eta^3 \right) = \hat{\phi}_{4y}(\xi, \eta) \\ \hat{\phi}_{23}(\xi, \eta) = -\frac{1}{8} \left(1 - \xi + \eta - \xi\eta - \eta^2 + \eta^2\xi - \eta^3 + \xi\eta^3 \right) = \hat{\phi}_{2y}(\xi, \eta) \\ \hat{\phi}_{32}(\xi, \eta) = \frac{1}{8} \left(1 - \xi - \eta + \xi\eta - \eta^2 + \xi\eta^2 + \eta^3 - \xi\eta^3 \right) = \hat{\phi}_{3y}(\xi, \eta). \end{array} \right.$$

Leurs dérivées secondes

$$(4-41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_{14}}{\partial \xi^2}(\xi, \eta) = 0 ; \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_{14}}{\partial \eta^2}(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(-1 - \xi - 3\eta - 3\xi\eta) \\ \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_{41}}{\partial \xi^2}(\xi, \eta) = 0 ; \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_{41}}{\partial \eta^2}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(-1 - \xi + 3\eta + 3\xi\eta) \\ \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_{23}}{\partial \xi^2}(\xi, \eta) = 0 ; \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_{23}}{\partial \eta^2}(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(-1 + \xi - 3\eta + 3\xi\eta) \\ \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_{32}}{\partial \xi^2}(\xi, \eta) = 0 ; \frac{\partial^2 \hat{\varphi}_{32}}{\partial \eta^2}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(-1 + \xi + 3\eta - 3\xi\eta). \end{array} \right.$$

Nous notons sur le carré de référence $\hat{K}$, $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (\xi, \eta)$.

Sur ce carré de référence $\hat{K}$, les expressions (4-25) et (4-26) donnent :

$$\frac{\partial^2 w_{\tilde{I}}}{\partial x_n^2} \frac{\partial^2 w_{\tilde{J}}}{\partial x_m^2} = \frac{1}{\Delta^2} \frac{\partial^2 \hat{w}_{\tilde{I}}}{\partial \hat{x}_n^2} \frac{\partial^2 \hat{w}_{\tilde{J}}}{\partial \hat{x}_m^2}.$$

Par suite, le premier membre de la 3^e-2 ligne du système, c'est-à-dire le premier membre de l'expression (4-26)¹, en faisant la somme des quatre expressions de (4-29) à (4-32) et en passant sur le carré de référence $\hat{K}$, s'écrit :

noeud $\tilde{j}$ Σ $\tilde{j}$	son coefficient
$u(\tilde{j})$	$\frac{1}{\Delta} \int_{\hat{K}} \left(\frac{\partial^2 \hat{\phi}_1}{\partial \hat{x}_n^2} \frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial \hat{x}_m^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_2}{\partial \hat{x}_n^2} \frac{\partial \hat{\phi}_2}{\partial \hat{x}_m^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_3}{\partial \hat{x}_n^2} \frac{\partial \hat{\phi}_3}{\partial \hat{x}_m^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_4}{\partial \hat{x}_n^2} \frac{\partial \hat{\phi}_4}{\partial \hat{x}_m^2} \right) d\hat{x}$
$u_x(\tilde{j})$	$\frac{1}{\Delta} \int_{\hat{K}} \left(\frac{\partial^2 \hat{\phi}_{1x}}{\partial \hat{x}_n^2} \frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial \hat{x}_m^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{2x}}{\partial \hat{x}_n^2} \frac{\partial \hat{\phi}_2}{\partial \hat{x}_m^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{3x}}{\partial \hat{x}_n^2} \frac{\partial \hat{\phi}_3}{\partial \hat{x}_m^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{4x}}{\partial \hat{x}_n^2} \frac{\partial \hat{\phi}_4}{\partial \hat{x}_m^2} \right) d\hat{x}$
$u_y(\tilde{j})$	$\frac{1}{\Delta} \int_{\hat{K}} \left(\frac{\partial^2 \hat{\phi}_{1y}}{\partial \hat{x}_n^2} \frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial \hat{x}_m^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{2y}}{\partial \hat{x}_n^2} \frac{\partial \hat{\phi}_2}{\partial \hat{x}_m^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{3y}}{\partial \hat{x}_n^2} \frac{\partial \hat{\phi}_3}{\partial \hat{x}_m^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{4y}}{\partial \hat{x}_n^2} \frac{\partial \hat{\phi}_4}{\partial \hat{x}_m^2} \right) d\hat{x}$
$u(\tilde{j}_1)$	$\frac{1}{\Delta} \int_{\hat{K}} \left(\frac{\partial^2 \hat{\phi}_2}{\partial \hat{x}_n^2} \frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial \hat{x}_m^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_3}{\partial \hat{x}_n^2} \frac{\partial \hat{\phi}_4}{\partial \hat{x}_m^2} \right) d\hat{x}$
$u_x(\tilde{j}_1)$	$\frac{1}{\Delta} \int_{\hat{K}} \left(\frac{\partial^2 \hat{\phi}_{2x}}{\partial \hat{x}_n^2} \frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial \hat{x}_m^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{3x}}{\partial \hat{x}_n^2} \frac{\partial \hat{\phi}_4}{\partial \hat{x}_m^2} \right) d\hat{x}$
$u_y(\tilde{j}_1)$	$\frac{1}{\Delta} \int_{\hat{K}} \left(\frac{\partial^2 \hat{\phi}_{2y}}{\partial \hat{x}_n^2} \frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial \hat{x}_m^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{3y}}{\partial \hat{x}_n^2} \frac{\partial \hat{\phi}_4}{\partial \hat{x}_m^2} \right) d\hat{x}$
$u(\tilde{j}_2)$	$\frac{1}{\Delta} \int_{\hat{K}} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_3}{\partial \hat{x}_n^2} \frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial \hat{x}_m^2} d\hat{x}$
$u_x(\tilde{j}_2)$	$\frac{1}{\Delta} \int_{\hat{K}} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{3x}}{\partial \hat{x}_n^2} \frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial \hat{x}_m^2} d\hat{x}$
$u_y(\tilde{j}_2)$	$\frac{1}{\Delta} \int_{\hat{K}} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{4y}}{\partial \hat{x}_n^2} \frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial \hat{x}_m^2} d\hat{x}$

$u(\tilde{\gamma}_3)$	$\frac{1}{\Delta} \int_{\hat{K}} \left(\frac{\partial^2 \hat{\phi}_4}{\partial \hat{X}_n^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_1}{\partial \hat{X}_m^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_3}{\partial \hat{X}_n^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_2}{\partial \hat{X}_m^2} \right) d\hat{x}$
$u_x(\tilde{\gamma}_3)$	$\frac{1}{\Delta} \int_{\hat{K}} \left(\frac{\partial^2 \hat{\phi}_{4x}}{\partial \hat{X}_n^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_1}{\partial \hat{X}_m^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{3x}}{\partial \hat{X}_n^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_2}{\partial \hat{X}_m^2} \right) d\hat{x}$
$u_y(\tilde{\gamma}_3)$	$\frac{1}{\Delta} \int_{\hat{K}} \left(\frac{\partial^2 \hat{\phi}_{4y}}{\partial \hat{X}_n^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_1}{\partial \hat{X}_m^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{3y}}{\partial \hat{X}_n^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_2}{\partial \hat{X}_m^2} \right) d\hat{x}$
$u(\tilde{\gamma}_4)$	$\frac{1}{\Delta} \int_{\hat{K}} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_4}{\partial \hat{X}_n^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_2}{\partial \hat{X}_m^2} d\hat{x}$
$u_x(\tilde{\gamma}_4)$	$\frac{1}{\Delta} \int_{\hat{K}} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{4x}}{\partial \hat{X}_n^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_2}{\partial \hat{X}_m^2} d\hat{x}$
$u_y(\tilde{\gamma}_4)$	$\frac{1}{\Delta} \int_{\hat{K}} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{4y}}{\partial \hat{X}_n^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_2}{\partial \hat{X}_m^2} d\hat{x}$
$u(\tilde{\gamma}_5)$	$\frac{1}{\Delta} \int_{\hat{K}} \left(\frac{\partial^2 \hat{\phi}_1}{\partial \hat{X}_n^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_2}{\partial \hat{X}_m^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_4}{\partial \hat{X}_n^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_3}{\partial \hat{X}_m^2} \right) d\hat{x}$
$u_x(\tilde{\gamma}_5)$	$\frac{1}{\Delta} \int_{\hat{K}} \left(\frac{\partial^2 \hat{\phi}_{1x}}{\partial \hat{X}_n^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_2}{\partial \hat{X}_m^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{4x}}{\partial \hat{X}_n^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_3}{\partial \hat{X}_m^2} \right) d\hat{x}$
$u_y(\tilde{\gamma}_5)$	$\frac{1}{\Delta} \int_{\hat{K}} \left(\frac{\partial^2 \hat{\phi}_{1y}}{\partial \hat{X}_n^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_2}{\partial \hat{X}_m^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{4y}}{\partial \hat{X}_n^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_3}{\partial \hat{X}_m^2} \right) d\hat{x}$

$u(\tilde{\gamma}_6)$	$\frac{1}{\Delta} \int_{\hat{K}} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_1}{\partial \hat{X}_n^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_3}{\partial \hat{X}_m^2} d\hat{x}$
$u_x(\tilde{\gamma}_6)$	$\frac{1}{\Delta} \int_{\hat{K}} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{1x}}{\partial \hat{X}_n^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_3}{\partial \hat{X}_m^2} d\hat{x}$
$u_y(\tilde{\gamma}_6)$	$\frac{1}{\Delta} \int_{\hat{K}} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{1y}}{\partial \hat{X}_n^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_3}{\partial \hat{X}_m^2} d\hat{x}$
$u(\tilde{\gamma}_7)$	$\frac{1}{\Delta} \int_{\hat{K}} \left(\frac{\partial^2 \hat{\phi}_2}{\partial \hat{X}_n^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_3}{\partial \hat{X}_m^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_1}{\partial \hat{X}_n^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_4}{\partial \hat{X}_m^2} \right) d\hat{x}$
$u_x(\tilde{\gamma}_7)$	$\frac{1}{\Delta} \int_{\hat{K}} \left(\frac{\partial^2 \hat{\phi}_{2x}}{\partial \hat{X}_n^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_3}{\partial \hat{X}_m^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{1x}}{\partial \hat{X}_n^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_4}{\partial \hat{X}_m^2} \right) d\hat{x}$
$u_y(\tilde{\gamma}_7)$	$\frac{1}{\Delta} \int_{\hat{K}} \left(\frac{\partial^2 \hat{\phi}_{2y}}{\partial \hat{X}_n^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_3}{\partial \hat{X}_m^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{1y}}{\partial \hat{X}_n^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_4}{\partial \hat{X}_m^2} \right) d\hat{x}$
$u(\tilde{\gamma}_8)$	$\frac{1}{\Delta} \int_{\hat{K}} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_2}{\partial \hat{X}_n^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_4}{\partial \hat{X}_m^2} d\hat{x}$
$u_x(\tilde{\gamma}_8)$	$\frac{1}{\Delta} \int_{\hat{K}} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{2x}}{\partial \hat{X}_n^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_4}{\partial \hat{X}_m^2} d\hat{x}$
$u_y(\tilde{\gamma}_8)$	$\frac{1}{\Delta} \int_{\hat{K}} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{2y}}{\partial \hat{X}_n^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_4}{\partial \hat{X}_m^2} d\hat{x}$
- Tableau 1 -	

Le deuxième membre de 3 $\tilde{\Gamma}$ -2 ligne du système, c'est-à-dire l'expression (4-35), devient :

$$(4-42) \quad (f, \varphi_{\tilde{\Gamma}}) = \Delta \left[\sum_{\ell=1}^4 \hat{w}_{\ell} f(F_K(\hat{\eta}_{\ell})) (\hat{\phi}_1(\eta_{\ell}) + \hat{\phi}_2(\hat{\eta}_{\ell}) + \hat{\phi}_3(\hat{\eta}_{\ell}) + \hat{\phi}_4(\hat{\eta}_{\ell})) \right]$$

où $\hat{\eta}_{\ell}$ $1 \leq \ell \leq 4$ sont les quatre points de Gauss sur le carré $\hat{K}$ de référence et $\hat{w}_{\ell} = 1$.

Il en résulte que

$$(4-43) \quad (f, \varphi_{\tilde{\Gamma}}) = \Delta \sum_{\ell=1}^4 f(F_K(\hat{\eta}_{\ell})) (\hat{\phi}_1(\hat{\eta}_{\ell}) + \hat{\phi}_2(\hat{\eta}_{\ell}) + \hat{\phi}_3(\hat{\eta}_{\ell}) + \hat{\phi}_4(\hat{\eta}_{\ell})).$$

Le calcul pénible (fait à la main) des intégrales qui existent dans le tableau 1, donne le premier membre de 3 $\tilde{\Gamma}$ -2 ligne du système, mais le calcul à la main du second membre s'avère impossible, ce qui nous a amenés à construire un programme en faisant entrer tous les noeuds du maillage pour sa formation.

Le 3 $\tilde{\Gamma}$ -2 ligne du système est alors :

$$(4-44) \quad \begin{aligned} a_h(u_h, \varphi_{\tilde{\Gamma}}) &= 10 u(\tilde{\Gamma}) + 6 u_x(\tilde{\Gamma}) + 6 u_y(\tilde{\Gamma}) - 2 u(\tilde{\Gamma}_1) - 2 u_x(\tilde{\Gamma}_1) + 0 u_y(\tilde{\Gamma}_1) \\ &- \frac{1}{2} u(\tilde{\Gamma}_2) - \frac{1}{2} u_x(\tilde{\Gamma}_2) - \frac{1}{2} u_y(\tilde{\Gamma}_2) - 2 u(\tilde{\Gamma}_3) + 0 u_x(\tilde{\Gamma}_3) - 2 u_y(\tilde{\Gamma}_3) \\ &- \frac{1}{2} u(\tilde{\Gamma}_4) - \frac{1}{2} u_x(\tilde{\Gamma}_4) - \frac{1}{2} u_y(\tilde{\Gamma}_4) - 2 u(\tilde{\Gamma}_5) - 2 u_x(\tilde{\Gamma}_5) + 0 u_y(\tilde{\Gamma}_5) \\ &- \frac{1}{2} u(\tilde{\Gamma}_6) - \frac{1}{2} u_x(\tilde{\Gamma}_6) - \frac{1}{2} u_y(\tilde{\Gamma}_6) - 2 u(\tilde{\Gamma}_7) + 0 u_x(\tilde{\Gamma}_7) - 2 u_y(\tilde{\Gamma}_7) \\ &- \frac{1}{2} u(\tilde{\Gamma}_8) - \frac{1}{2} u_x(\tilde{\Gamma}_8) - \frac{1}{2} u_y(\tilde{\Gamma}_8) \\ &= \Delta^2 \sum_{\ell=1}^4 f(F_K(\hat{\eta}_{\ell})) (\hat{\phi}_1(\hat{\eta}_{\ell}) + \hat{\phi}_2(\hat{\eta}_{\ell}) + \hat{\phi}_3(\hat{\eta}_{\ell}) + \hat{\phi}_4(\hat{\eta}_{\ell})). \end{aligned}$$

Pour former la 3 $\tilde{\Gamma}$ -1 et 3 $\tilde{\Gamma}$ lignes du système linéaire (4-19), on fait un raisonnement analogue à la 3 $\tilde{\Gamma}$ -2 ligne de ce système.

$$\begin{aligned}
 (4-45) \quad a_h(u_h, \varphi_{\tilde{\gamma}_x}) &= 6 u(\tilde{\gamma}) + \frac{16}{3} u_x(\tilde{\gamma}) + 4 u_y(\tilde{\gamma}) - 2 u(\tilde{\gamma}_1) - \frac{4}{3} u_x(\tilde{\gamma}_1) + 0 u_y(\tilde{\gamma}_1) \\
 &\quad - \frac{1}{2} u(\tilde{\gamma}_2) - \frac{1}{3} u_x(\tilde{\gamma}_2) + 0 u_y(\tilde{\gamma}_2) + 0 u(\tilde{\gamma}_3) + \frac{4}{3} u_x(\tilde{\gamma}_3) + 0 u_y(\tilde{\gamma}_3) \\
 &\quad - \frac{1}{2} u(\tilde{\gamma}_4) - \frac{1}{3} u_x(\tilde{\gamma}_4) + 0 u_y(\tilde{\gamma}_4) - 2 u(\tilde{\gamma}_5) - \frac{4}{3} u_x(\tilde{\gamma}_5) + 0 u_y(\tilde{\gamma}_5) \\
 &\quad - \frac{1}{2} u(\tilde{\gamma}_6) - \frac{1}{3} u_x(\tilde{\gamma}_6) + 0 u_y(\tilde{\gamma}_6) + 0 u(\tilde{\gamma}_7) + \frac{4}{3} u_x(\tilde{\gamma}_7) + 0 u_y(\tilde{\gamma}_7) \\
 &\quad - \frac{1}{2} u(\tilde{\gamma}_8) - \frac{1}{3} u_x(\tilde{\gamma}_8) + 0 u_y(\tilde{\gamma}_8) \\
 &= \Delta^2 \sum_{\ell=1}^4 f(F_K(\hat{\eta}_\ell)) (\hat{\varphi}_{12}(\hat{\eta}_\ell) + \hat{\varphi}_{21}(\hat{\eta}_\ell) + \hat{\varphi}_{34}(\hat{\eta}_\ell) + \hat{\varphi}_{43}(\hat{\eta}_\ell))
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 (4-46) \quad a_h(u_h, \varphi_{\tilde{\gamma}_y}) &= 6 u(\tilde{\gamma}) + 4 u_x(\tilde{\gamma}) + \frac{16}{3} u_y(\tilde{\gamma}) + 0 u(\tilde{\gamma}_1) + 0 u_x(\tilde{\gamma}_1) + \frac{4}{3} u_y(\tilde{\gamma}_1) \\
 &\quad - \frac{1}{2} u(\tilde{\gamma}_2) + 0 u_x(\tilde{\gamma}_2) - \frac{1}{3} u_y(\tilde{\gamma}_2) - 2 u(\tilde{\gamma}_3) + 0 u_x(\tilde{\gamma}_3) - \frac{4}{3} u_y(\tilde{\gamma}_3) \\
 &\quad - \frac{1}{2} u(\tilde{\gamma}_4) + 0 u_x(\tilde{\gamma}_4) - \frac{1}{3} u_y(\tilde{\gamma}_4) + 0 u(\tilde{\gamma}_5) + 0 u_x(\tilde{\gamma}_5) + \frac{4}{3} u_y(\tilde{\gamma}_5) \\
 &\quad - \frac{1}{2} u(\tilde{\gamma}_6) + 0 u_x(\tilde{\gamma}_6) - \frac{1}{3} u_y(\tilde{\gamma}_6) - 2 u(\tilde{\gamma}_7) + 0 u_x(\tilde{\gamma}_7) - \frac{4}{3} u_y(\tilde{\gamma}_7) \\
 &\quad - \frac{1}{2} u(\tilde{\gamma}_8) + 0 u_x(\tilde{\gamma}_8) - \frac{1}{3} u_y(\tilde{\gamma}_8) \\
 &= \Delta^2 \sum_{\ell=1}^4 f(F_K(\hat{\eta}_\ell)) (\hat{\varphi}_{14}(\hat{\eta}_\ell) + \hat{\varphi}_{41}(\hat{\eta}_\ell) + \hat{\varphi}_{23}(\hat{\eta}_\ell) + \hat{\varphi}_{32}(\hat{\eta}_\ell)).
 \end{aligned}$$

Donc, en conclusion, pour obtenir la matrice de rigidité et le second membre du système linéaire global, nous utiliserons les expressions (4-44), (4-45) et (4-46) en faisant parcourir tous les noeuds du maillage.

Ainsi, la matrice de rigidité et le second membre sont calculés ,
le système linéaire pourra se mettre sous la forme :

$$(4-47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver le vecteur } U \text{ tel que} \\ KU = b \end{array} \right.$$

où K = Matrice de rigidité

U = Vecteur inconnu à calculer

b = Second membre.

Remarque (4-4) :

La matrice K étant symétrique définie positive et bande.

Pour résoudre le système (4-47), nous adopterons la méthode de Cholesky bande: Méthode directe qui est très adaptée pour résoudre les systèmes linéaires donnés par éléments finis.

Remarque (4-5) :

Dans le cas du maillage à rectangles égaux de côtés h_1 et h_2 , le résultat sera identique.

B I B L I O G R A P H I E
=====

- [1] ADINI, A. , CLCUGH, R.W.
"Analysis of the bending by the finite element method",
NSF Report G. 7337, 1961

- [2] BRAMBLE, J.H. , HILBERT, S.H.
"Bounds for a class of linear functionals with applications
to hermite interpolation", Numerische Mathematik 16
(1971), 362-369

- [3] BREZZI, F. , MARINI, L.D.
"On the numerical solution of plate bending problems by
hybrid methods" (to appear in Pubblicazioni del Laboratorio
di Analisi Numerica del C.N.R. , Ravia)

- [4] CIARLET, P.G.
"Numerical Analysis of the Finite Element Method",
Presse de l'Université de Montréal, 1976

- [5] CIARLET, P.G.
"Numerical Analysis Element Method for Elliptic Boundary
Value Problems", North Holland, 1977

- [6] CIARLET, P.G.
"Introduction à l'Analyse Numérique de la Méthode des
Eléments finis", (cours de DEA, 1977, Université de
Paris VI, Tours 55-56), Paris

- [7] CIARLET, P. G.

"Quelques méthodes d'éléments finis pour le problème d'une plaque encastrée", Colloques IRIA, Méthodes de Calcul Scientifique et Technique, 66-86, Recquencourt, 1973

- [8] CIARLET, P. G.

"Conforming and non conforming finite element methods for solving the plate problem", Lecture Notes in Mathematics, 1974, pp. 21-31

- [9] CIARLET, P. G. , RAVIART, P. A.

"The combined effect curved boundaries and numerical integration in psoparametric finite element methods", In the Mathematical Foundations of the F. E. M. , with applications to P. D. E. (Aziz, Ed.), pp. 409-474, Academic Press, New York (1972)

- [10] CIARLET, P. G. , RAVIART, P. A.

"L'effet de l'intégration numérique dans la méthode d'éléments finis", à paraître

- [11] CROUZEIX, M. , RAVIART, P. A.

"Conforming and non conforming finite element methods for solving the stationary stokes equation", RAIRO, 7ème année, Décembre 1973, R-3 pp. 33-76

- [12] GLOWINSKI, R.

"Approximation externes, par éléments finis de Lagrange d'ordre un et deux, du problème de Dirichlet pour l'opérateur biharmonique, méthode itérative de résolution des problèmes approchés", Conferences on Numerical Analysis, Royal Irish Academy, 1972

- [13] IRONS, B. M., RAZZAQUE, A.
"Experience with the patch test for convergence of finite elements, the mathematical foundations of the finite element method with application to partial differential equations", (A. K. Aziz, Ed.), pp. 557-587, Academic Press, New York, 1972
- [14] JOHNSON, C.
"On the convergence of some mixed finite element methods in plate bending problems", Numer. Math. 21, 43-62, 1973
- [15] JOHNSON, C.
"Convergence of another mixed finite element method for plate bending problems", Report n°27, Department of Mathematics, Chalmers Institute of Technology and the University of Göteborg, 1972
- [16] KONDRAT'EV, V. A.
"Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points", Trudy Mosk, Mat., obšč 16 (1967), pp. 209-292
- [17] LANDAU, L., LIFCHITZ, E.
"Théorie de l'élasticité", Mir Moscou, 1967
- [18] LASCAUX, P., LESANT, P.
"Some non conforming finite element for the plate, bending problem", In RAIRO, 9ème année, R-1, 1975 pp. 9-53
- [19] LESANT, P.
"Thèse de Doctorat d'Etat", Université Pierre et Marie Curie Paris VI, Paris, 1975
- [20] LIONS, J. L., MAGENES, E.
"Problèmes aux limites non homogènes et applications", Dunod (1968)

- [21] NEČAS, J.
"Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques", Masson, Paris, 1967
- [22] ODEN, J. T.
"Some contributions to the mathematical theory of mixed finite element approximations", Tokyo Seminar on Finite Elements 1973
- [23] PIAN, T. H. H.
"Finite element formulation by variational principles with relaxed continuity requirements", The Mathematical Foundations of the Finite Elements Method with Applications to Partial Differential Equations (A. K. Aziz Editor), pp. 671-687, Academic Press, New York 1972
- [24] STRANG, G.
"Variational Grimes in the Finite Element Method", In the Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Application to P.D.E. (A. K. Aziz, Ed.), pp. 689-710, Academic Press, New York 1972
- [25] STRANG, G.
"An Analysis of the Finite Element Method", Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1973
- [26] ZĚNISĚK, A.
"A general theorem on triangular finite C^m -elements", RAIRO R. 2 vol. 8 1974 pp. 119-127
- [27] ZLAMAL, M.
"Superconvergence and Reduced Integration in the Finite Element Method", Mathematic of Computation, volume 32, Number 143, July 1978, pp. 663-685

[28] ZIENKIEWICZ, O. C.

"The finite element in engineering science",
Mac Graw-Hill, London, 1971.

